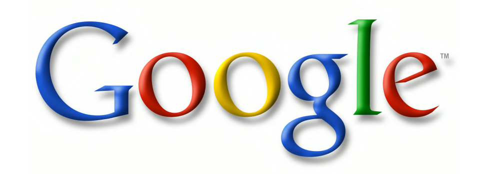
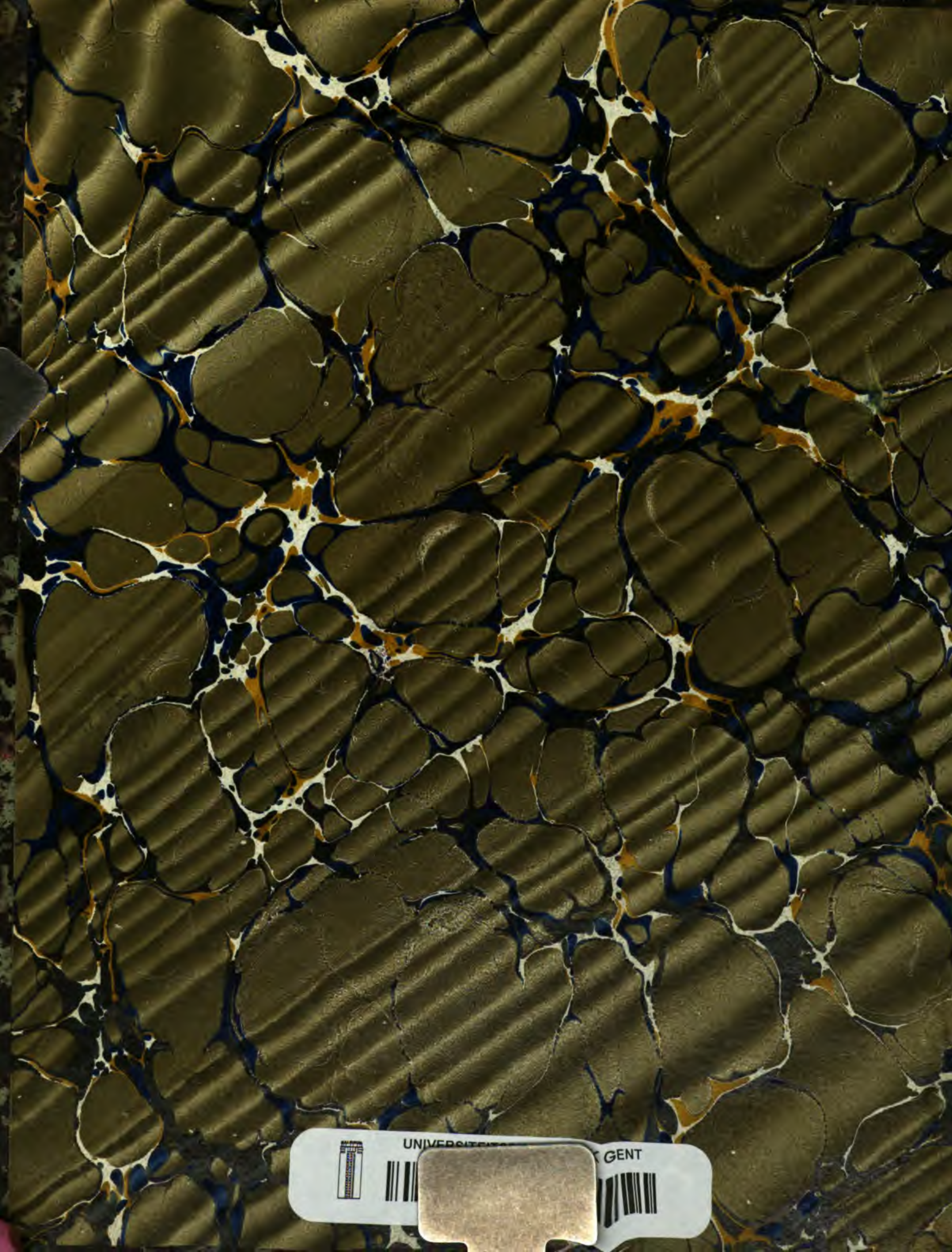
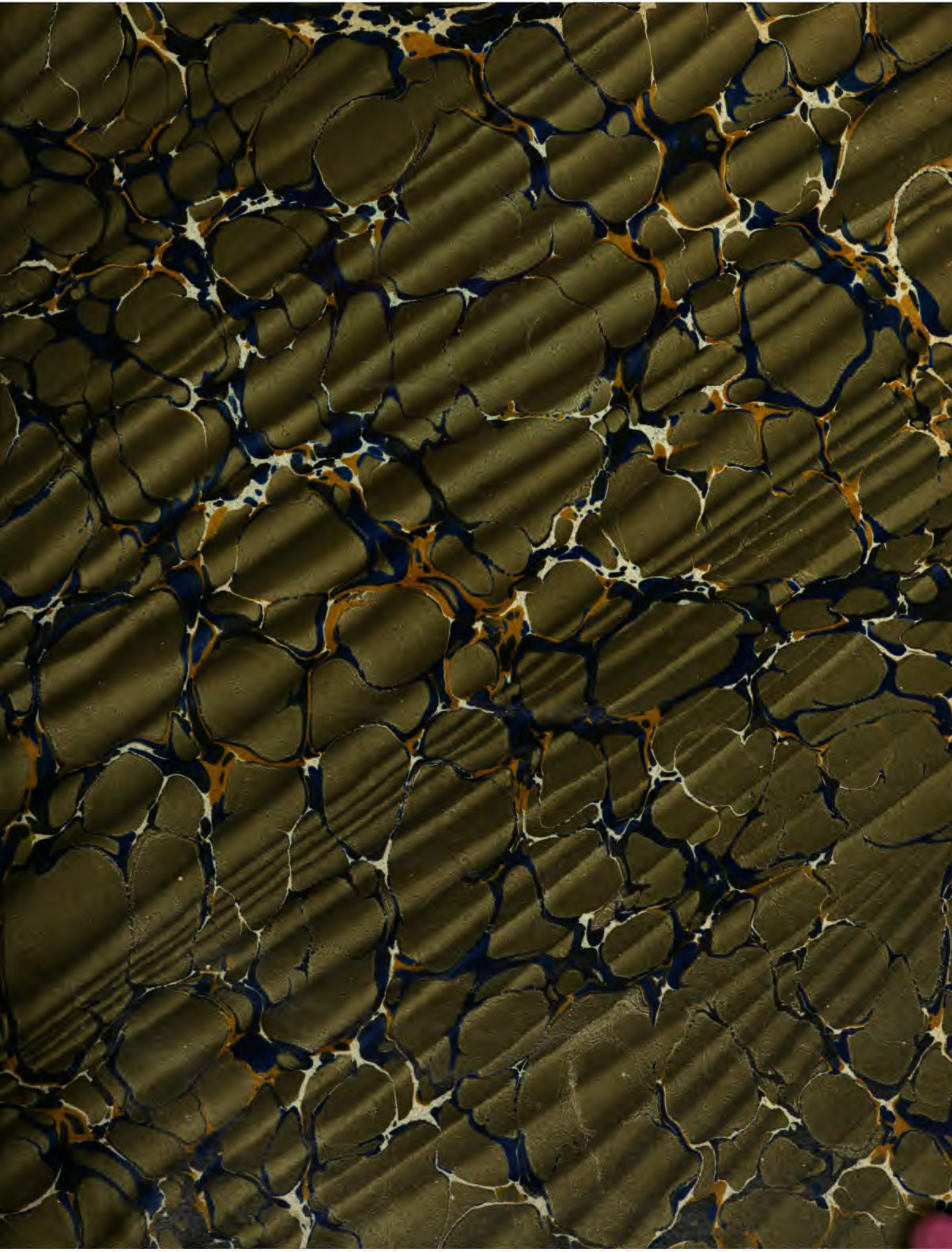

Google







ESSAI

SUR

UN NOUVEAU MODE D'EXPOSITION DES PRINCIPES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ;

SUIVI

De quelques réflexions relatives aux divers points de vue sous lesquels cette branche d'analise a été envisagée jusqu'ici, et, en général, à l'application des systèmes métaphysiques aux sciences exactes.

Par M. Servois, professeur aux écoles d'artillerie.

A NISMES,

DE L'IMPRIMERIE DE P. BLACHIER-BELLE.

Et se trouve à PARIS, chez la dame Veuve Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n.° 57.

1814.



ESSAI

Sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel; (*)

> « A mesure que (l'analise) s'étend et s'enrichit de » nouvelles méthodes, elle devient plus compliquée, » et l'on ne peut la simplifier qu'en généralisant » et en réduisant, tout à la fois, les méthodes qui » peuvent être susceptibles de ces avantages. »
>
> (*Mécanique analitique*, page 338.)

1. Je commence par fixer quelques notations et par donner quelques définitions.

J'exprime

Par fz, fz, Fz, φz,..... des fonctions quelconques de la quantité quelconque z : je les appelle *Fonctions monômes simples.*

Par ffz, ffFz,..... des fonctions de fonctions de z : ce sont des *Fonctions monômes composées.*

(*) Ce qu'on va lire est, en substance, extrait de deux mémoires, sur le développement des fonctions en séries, par la méthode différentielle, présentés à la première classe de l'institut, le 1.er, vers la fin de 1805, le 2.me, en 1809, et qui ont reçu l'approbation de la classe, sur un rapport de MM. Legendre et Lacroix, en date du 5 d'octobre 1812.

Par fz, f^2z, f^3z, ...f^nz, la fonction marquée par f, prise successivement 1 fois, 2 fois, 3 fois.....n fois, de la quantité z : ce sont des *Fonctions monômes du* 1er, *du* 2.e, *du* 3.e, ...*du n.*^{me} *ordre* : n est l'*exposant* de l'ordre de la fonction.

Par f^{-1}z, f^{-2}z, ... f^{-n}z, des fonctions de z dont la définition complète est donnée par l'équation générale

$$f^n f^{-n} z = f^{-n} f^n z = z : \qquad (1)$$

ce sont des *Fonctions inverses* ou d'*Ordre négatif.*

Si la quantité sous le signe fonctionnaire, c'est-à-dire, le *sujet de la fonction*, est polynôme, on le met entre parenthèses. Ainsi, f$(a+z)$ désigne la fonction f du binôme $a+z$. Lorsque le sujet de la fonction est regardé comme complexe, on emploie, avec les parenthèses, des virgules interposées entre les *sujets partiels.* Ainsi f$[x, (b+y), z, \ldots]$ exprime la fonction f des quantités x, $b+y$, z, ...

Si f$z=z$; c'est-à-dire, si le sujet n'est pris qu'une fois, la fonction f est le facteur 1. Si f$z=az$, ou si le sujet est pris a fois, la fonction f est le facteur a.

En supposant que le sujet z soit complexe, par exemple, $z=\varphi(x, y, \ldots\ldots)$, x, y, ... étant des *quantités variables*, arbitraires ou indépendantes qui reçoivent respectivement les accroissemens invariables ou constans quelconques α, β, ..., si on a

$$fz=\varphi(x+\alpha, y+\beta, \ldots\ldots) ;$$

la fonction f est ce qu'on appelle l'*état varié* de z. Je propose, avec Arbogast (*Calculs des dérivations*, n.° 442) de désigner cette fonction particulière par la lettre E ; et j'adopte les définitions suivantes

$$\left.\begin{array}{l} E\, z=\varphi(x+\alpha, y+\beta, \ldots\ldots), \\ E^{-1}z=\varphi(x-\alpha, y-\beta, \ldots\ldots), \\ E^n z=\varphi(x+n\alpha, y+n\beta, \ldots\ldots). \end{array}\right\} (2)$$

Si $fz = Ez - z$, la fonction f est ce qu'on appelle la *différence* de z, à laquelle est consacrée, depuis long-temps, la lettre Δ. Ainsi, on a les définitions

$$\Delta z = Ez - z = \varphi(x+\alpha, y+\beta, \ldots) - \varphi(x, y, \ldots). \qquad (3)$$

On conclut de là, sur-le-champ, cette autre expression de l'état varié

$$Ez = z + \Delta z. \qquad (4)$$

Quand le sujet z est complexe, on a souvent besoin d'exprimer que la fonction f n'est prise que par rapport à un seul *sujet partiel*. Si donc l'on veut exprimer que la fonction f n'est prise que par rapport à x, on écrira $\frac{f}{x}z$; si la fonction ne doit atteindre que y, on écrira $\frac{f}{y}z$, et ainsi de suite. $\frac{f}{x}z$, $\frac{f}{y}z$, ... sont donc les *fonctions* f *partielles de* z. Ainsi, a étant un facteur, on aura la définition suivante du facteur a partiel

$$\frac{a}{x}z = \varphi(ax, y, \ldots).$$

De même, d'après (2), (3), on aura les définitions suivantes des *états variés partiels* et des *différences partielles*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{E^n}{x}z = \varphi(x+n\alpha, y, \ldots); \quad \frac{E^n}{y}z = \varphi(x, y+n\beta, \ldots); \\ &\frac{\Delta}{x}z = \varphi(x+\alpha, y \ldots) - \varphi(x, y, \ldots) = \frac{E}{x}z - z; \\ &\frac{\Delta}{y}z = \varphi(x, y+\beta, \ldots) - \varphi(x, y, \ldots) = \frac{E}{y}z - z. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$f^0 z$ est toujours égal à z; car, l'expression elle-même indique

qu'on ne prend pas la fonction f de z, et par conséquent qu'à cet égard z ne subit aucune modification. Ainsi

$$z = a^0 z = E^0 z = \Delta^0 z = \frac{E^0}{x} z = \frac{E^0}{y} z = \ldots\ldots \qquad (6)$$

Toute fonction inverse admet un *complément arbitraire*, lorsque la fonction directe du 1.er ordre a la propriété d'annuler dans son sujet certains termes, ou d'y rendre égaux à l'unité certains facteurs. Ainsi, par exemple, la différence Δ annulant, entre autres, les termes constans, la fonction inverse $\Delta^{-1}z$ prend, à cet égard, pour complément *additionnel*, la constante arbitraire *A*.

On a coutume de désigner par Σz, $\Sigma^2 z$, ... $\Sigma^n z$, des fonctions de z qu'on appelle *intégrales*, et dont la définition est dans l'équation

$$\Delta^n \Sigma^n z = \Sigma^n \Delta^n z = z \ ;$$

et, comme on a aussi (1)

$$\Delta^n \Delta^{-n} z = \Delta^{-n} \Delta^n z = z \ ;$$

il s'ensuit que

$$\Sigma^n z = \Delta^{-n} z \ . \qquad (7)$$

Par la même raison, L étant la notation du logarithme naturel, et e celle de la base du système, on aura

$$LL^{-1}z = z = Le^z \ ; \quad L^2L^{-2}z = z = L^2e^{e^z} \ ;\ldots\ldots$$

Donc aussi

$$e^z = L^{-1}z \ ; \quad e^{e^z} = L^{-2}z \ ;\ldots\ldots \qquad (8)$$

On trouvera de même

$$\text{Sin.}^{-1}z = \text{Arc.}(\text{Sin.} = z) \ ; \quad \text{Tang.}^{-1}z = \text{Arc.}(\text{Tang.} = z) \ ;\ldots\ldots \qquad (9)$$

car on a

$$z = \text{Sin}.\text{Sin}.^{-1}z = \text{Sin}.\text{Arc}.(\text{Sin}.=z)$$

$$= \text{Tang}.\text{Tang}.^{-1}z = \text{Tang}.\text{Arc}.(\text{Tang}.=z) ;$$

Pour prévenir toute méprise, le produit de $\mathrm{f}x$ par fy sera représenté par $\mathrm{f}x\,.\,fy$. L'expression $\mathrm{f}xfy$ signifierait la fonction f du produit de x par fy. La puissance n de $\mathrm{f}x$ sera indiquée par $(\mathrm{f}x)^n$. L'expression $\mathrm{f}x^n$ désignant la fonction f de la puissance n de x.

2. Soit

$$Fz = \mathrm{f}z + fz + \varphi z + \ldots\ldots ; \qquad (10)$$

c'est-à-dire, supposons que la fonction F de z est telle que, pour la former, il faut, à la fonction f de z, *ajouter* (algébriquement) une seconde fonction f de la même lettre, puis une troisième marquée par φ, et ainsi de suite. La fonction F est alors de la classe des *fonctions polynômes.* On peut indiquer cette signification de la fonction F par une notation très-expressive, qui a le grand avantage de permettre de traiter les fonctions polynômes comme des fonctions monômes, sans perdre de vue de quelle manière elles sont composées. On écrit pour cela

$$\mathrm{F}z = (\mathrm{f} + f + \varphi + \ldots\ldots)z ;$$

il en résulte qu'on a aussi

$$\mathrm{F}^n z = (\mathrm{f} + f + \varphi + \ldots\ldots)^n z . \qquad (11)$$

Si F′ est une autre fonction polynôme de z, donnée par l'équation

$$\mathrm{F}'z = (\mathrm{f}' + f' + \varphi' + \ldots\ldots)z ,$$

on pourra aussi exprimer qu'on prend la fonction F′ de Fz, en écrivant

$$\mathrm{F}'\mathrm{F}z = (\mathrm{f}' + f' + \varphi' + \ldots)(\mathrm{f} + f + \varphi + \ldots)z ; \qquad (12)$$

et ainsi de suite.

Rien n'empêche qu'une, plusieurs ou toutes les *fonctions monômes composantes* ne soient des *facteurs*. Dans le dernier cas, après en avoir averti, on saura, sans équivoque (11), (12), que Fz, $F'Fz$, ... sont les produits de z multiplié par le polynôme $f+f+\varphi+\ldots$, ou par le produit $(f'+f'+\varphi'+\ldots)(f+f+\varphi+\ldots)$.

3. Soit

$$\varphi(x+y+\ldots)=\varphi x+\varphi y+\ldots \qquad (13)$$

Les fonctions qui, comme φ, sont telles que la fonction de la *somme* (algébrique) d'un nombre quelconque de quantités est égale à la somme des fonctions pareilles de chacune de ces quantités, seront appelées *distributives*.

Ainsi, parce que

$$a(x+y+\ldots)=ax+ay+\ldots; \quad E(x+y+\ldots)=Ex+Ey+\ldots;\ldots$$

le facteur a; l'état varié E, ... sont des fonctions distributives; mais, comme on n'a pas

$$\text{Sin.}(x+y+\ldots)=\text{Sin.}x+\text{Sin.}y+\ldots; \quad L(x+y+\ldots)=Lx+Ly+\ldots;\ldots$$

les sinus, les logarithmes naturels, ... ne sont point des fonctions distributives.

4. Soit

$$\mathrm{f}fz=f\mathrm{f}z. \qquad (14)$$

Les fonctions qui, comme f et f, sont telles qu'elles donnent des résultats identiques, quel que soit l'ordre dans lequel on les applique au sujet, seront appelées *commutatives entre elles*.

Ainsi, parce qu'on a

$$abz=baz; \quad aEz=Eaz;\ldots$$

les facteurs constans a, b, le facteur constant a et l'état varié E, sont des fonctions commutatives entre elles; mais comme, a étant toujours constant et x variable, on n'a pas

$$\text{Sin.}az=a\text{Sin.}z; \quad Exz=xEz; \quad \Delta xz=x\Delta z;\ldots;$$

il s'ensuit que le sinus avec le facteur constant, l'état varié ou la différence avec le facteur variable,..... n'appartiennent point à la classe des fonctions commutatives entre elles.

5. On recueille de ces simples notions plusieurs théorèmes importans.

Si deux fonctions simples φ, ψ sont distributives, la fonction monôme composée sera aussi distributive ; car puisque, par hypothèse

$$\psi(x+y)=\psi x+\psi y\ ,\quad \varphi(t+u)=\varphi t+\varphi u\ ,$$

on aura évidemment

$$\varphi\psi(x+y)=\varphi(\psi x+\psi y)=\varphi(t+u)=\varphi t+\varphi u=\varphi\psi t+\varphi\psi u\ ;$$

Il suit de là immédiatement que les différens ordres d'une fonction distributive sont aussi des fonctions distributives.

6 Si les fonctions monômes f, f, φ,..... composantes de la fonction polynôme F sont distributives, la fonction polynôme F aura aussi la même propriété ; car, d'après la définition (10) on aura

$$\mathrm{F}(x+y)=\mathrm{f}(x+y)+f(x+y)+\varphi(x+y)+\ldots\ ;$$

mais, parce que f, f, φ, sont distributives, cette équation deviendra

$$\mathrm{F}(x+y)=\mathrm{f}x+fx+\varphi x+\ldots\ldots+\mathrm{f}y+fy+\varphi y+\ldots\ldots=\mathrm{F}x+\mathrm{F}y.$$

On dira la même chose (n.° 5) des différens ordres F^n de la même fonction.

7. Si les fonctions f, f, φ,.... sont commutatives entre elles deux à deux, de manière qu'on ait

$$\mathrm{f}fz=f\mathrm{f}z\ ,\quad \mathrm{f}\varphi z=\varphi\mathrm{f}z\ ,\quad f\varphi z=\varphi fz\ ,\ldots\ldots;$$

et si ensuite, ayant pris un certain nombre n de ces fonctions, on en forme toutes les fonctions monômes composées que peut fournir la permutation entre eux des n signes fonctionnaires, toutes les fontions monômes composées résultantes seront équivalentes.

Ainsi, par exemple, si l'on prend les trois premières f, f, φ, on aura

$$\mathrm{f}f\varphi z=f\mathrm{f}\varphi z=\mathrm{f}\varphi fz=\varphi\mathrm{f}fz=f\varphi\mathrm{f}z=\varphi f\mathrm{f}z\ .$$

Pour le démontrer généralement, considérons la fonction monôme

$$f \ldots \mathrm{f}\varphi\psi F \ldots z$$

on pourra, sans en changer la valeur, permuter entre elles deux lettres fonctionnaires consécutives quelconques φ, ψ, par exemple. Car, soit

$$F \ldots z = t,$$

on aura

$$\varphi\psi F \ldots z = \varphi\psi t;$$

or, par hypothèse,

$$\varphi\psi t = \psi\varphi t;$$

donc

$$\varphi\psi F \ldots z = \psi\varphi F \ldots z;$$

et, en prenant, de part et d'autre, la fonction composée.

$$f \ldots \mathrm{f}\varphi\psi F \ldots z = f \ldots \mathrm{f}\psi\varphi F \ldots z.$$

Il suit de là que chaque lettre fonctionnaire peut être amenée à quelle place on veut de la combinaison première, et partant qu'on peut faire subir aux lettres fonctionnaires toutes les permutations possibles, sans altérer la valeur de la fonction composée.

On conclut évidemment de ce théorème que si, avec les lettres fonctionnaires commutatives entre elles deux à deux f, f, φ, ... on forme, à volonté, de nouvelles fonctions, composées de deux, de trois, ... lettres, telles que $\mathrm{f}fz$, $\varphi\psi Fz$, ..., toutes celles-ci seront aussi commutatives entre elles et avec la première.

8. Si f et f sont commutatives entre elles, elles le seront avec leurs inverses qui seront aussi commutatives entre elles, c'est-à-dire, que, si l'on a

$$\mathrm{f}fz = f\mathrm{f}z, \qquad (15)$$

on aura aussi

$$\mathrm{f}f^{-1}z = f^{-1}\mathrm{f}z; \quad f\mathrm{f}^{-1}z = \mathrm{f}^{-1}fz; \quad \mathrm{f}^{-1}f^{-1}z = f^{-1}\mathrm{f}^{-1}z: \qquad (16)$$

En effet, on a (1)

$f\mathrm{f}\mathrm{f}^{-1}z$

$$f\mathrm{f}^{-1}z=\mathrm{f}\mathrm{f}^{-1}fz\ ;$$

or, (15)

$$f\mathrm{f}^{-1}z=\mathrm{f}f\mathrm{f}^{-1}z\ ;$$

donc

$$\mathrm{f}f\mathrm{f}^{-1}z=\mathrm{f}\mathrm{f}^{-1}fz\ ;$$

et, en prenant de part et d'autre la fonction f^{-1},

$$f\mathrm{f}^{-1}z=\mathrm{f}^{-1}fz\ .$$

C'est le premier des théorèmes (16), et le deuxième se démontrerait de la même manière. Quant au troisième on a (1)

$$f^{-1}f\mathrm{f}^{-1}z=\mathrm{f}^{-1}f^{-1}fz\ ;$$

et, d'après le premier des théorèmes (16),

$$f^{-1}\mathrm{f}^{-1}fz=\mathrm{f}^{-1}f^{-1}fz\ ;$$

laquelle devient le troisième théorème (16), en y changeant fz en z.

9. Des théorèmes (n.os 7, 8) on conclut, sans discussion, les formules qui suivent.

Quand f, f, φ, ψ.... étant commutatives entre elles, k, m, n, ... sont des nombres entiers positifs, on a

$$\mathrm{f}^n f^m z=f^m\mathrm{f}^n z\ ; \qquad (17)$$

puis, en désignant $\mathrm{f}.fz$ par φz,

$$\varphi^n z=\mathrm{f}^n f^n z=f^n\mathrm{f}^n z\ ; \qquad (18)$$

enfin, en désignant $\mathrm{f}^n f^m z$ par ψz,

$$\psi^k z=\mathrm{f}^{kn}f^{km}z=f^{km}\mathrm{f}^{kn}z\ . \qquad (19)$$

10. Si les fonctions monômes d'une fonction polynôme sont à la fois distributives et commutatives entre elles, tous les ordres de la fonction polynôme seront des fonctions distributives (on le sait déjà d'après le n.° 6) et commutatives, non seulement avec les différens ordres des composantes, mais aussi avec tous les ordres des fonctions distributives qui sont commutatives avec ces dernières.

Soit

$$Fz=fz+\mathit{f}z+\ldots\ldots;$$

et supposons que les distributives f, f,.... soient commutatives tant entre elles qu'avec une distributive quelconque φ. On aura (n.° 6)

$$fFz=f^2z+f\mathit{f}z+\ldots\ldots=f^2z+\mathit{f}fz+\ldots\ldots=Ffz\ .$$

On trouvera de même

$$\mathit{f}Fz=F\mathit{f}z\ ,\ldots\ldots,\ \varphi Fz=F\varphi z\ .$$

Ajoutant à cela la considération fournie par la formule (17), la proposition se trouvera complètement démontrée.

11. Si les fonctions monômes de deux fonctions polynômes sont distributives et commutatives entre elles, les deux fonctions polynômes seront distributives (n.° 6) et commutatives entre elles.

Soient, en effet,

$$Fz=fz+\mathit{f}z+\ldots\ldots;\quad F'z=f'z+\mathit{f}'z+\ldots\ldots;$$

on aura évidemment

$$\left.\begin{array}{l} FF'z=ff'z+f\mathit{f}'z+\ldots\ldots+\mathit{f}f'z+\mathit{f}\mathit{f}'z+\ldots\ldots \\ F'Fz=f'fz+f'\mathit{f}z+\ldots\ldots+\mathit{f}'fz+\mathit{f}'\mathit{f}z+\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (20)$$

or, d'après l'hypothèse, ces deux développemens sont composés de termes identiques deux à deux ; on a donc

$$FF'z=F'Fz\ .$$

Si l'on fait ensuite

$$F''z=f''z+\mathit{f}''z+\ldots\ldots,$$

en supposant f'' f'',.... distributives et commutatives entre elles et avec f, f,...., f', f',....; F'' sera commutative avec F, F'; et par conséquent on aura (n.° 7)

$$FF'F''z=FF''F'z=F'FF''z=F'F''Fz=F''FF'z=F''F'Fz\ ;$$

et ainsi du reste.

12. Le développement des fonctions monômes composées, telles

que $FF'z$, $FF'F''z$, ...(n.° 11) dont les fonctions simples sont des fonctions polynômes, lorsque d'ailleurs les fonctions monômes qui composent ces dernières sont distributives et commutatives entre elles, ne présente aucune difficulté. On a, dans les équations (20), le type de celui de $FF'z$; on passe, par le même procédé, de celui-ci à celui de $FF'F''z$, et ainsi de suite; *on sait donc développer les fonctions comprises dans la formule*

$$FF'\ldots z=(\mathrm{f}+f+\ldots)(\mathrm{f}'+f'+\ldots)\ldots z \,. \qquad (21)$$

Le développement général d'un ordre quelconque $F^n z$ d'une fonction polynôme Fz, aux fonctions monômes distributives et commutatives, ressortit à la théorie générale du développement des fonctions en séries, dont nous allons exposer les principes.

13. Je suppose qu'on ait respectivement

$$\left.\begin{array}{ll} & x=\alpha\,,\quad x=\beta\,,\quad x=\gamma\,,\quad x=\delta\,,\ldots, \\ \text{lorsque} & \varphi x=0\,,\ \varphi' x=0\,,\ \varphi'' x=0\,,\ \varphi''' x=0\,,\ldots; \end{array}\right\}(22)$$

J'écris la suite indéfinie d'équations

$$\left.\begin{array}{l} F\,x=F\,\alpha+\varphi\,x\,.\,F'\,x\,, \\ F'\,x=F'\,\beta+\varphi'\,x\,.\,F''\,x\,, \\ F''x=F''\gamma+\varphi''x\,.\,F'''x\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right\}(23)$$

équations que je rends identiques, en supposant,

$$F'x=\frac{Fx-F\alpha}{\varphi x}\,,\quad F''x=\frac{F'x-F'\beta}{\varphi' x}\,,\quad F'''x=\frac{F''x-F''\gamma}{\varphi'' x}\,,\ldots \qquad (24)$$

Je prends la somme des produits respectifs des équations (23) par 1, φx, $\varphi x.\varphi' x$, $\varphi x.\varphi' x.\varphi'' x$, ..., et j'obtiens, en réduisant,

$$Fx=F\alpha+\varphi x\,.\,F'\beta+\varphi x\,.\,\varphi' x\,.\,F''\gamma+\varphi x\,.\,\varphi' x\,.\,\varphi'' x\,.\,F'''\delta+\ldots \qquad (25)$$

Les équations (24) donnent ensuite, sur-le-champ,

$$\left.\begin{array}{llll} F'\beta=\frac{F\beta-F\alpha}{\varphi\beta}, & F'\gamma=\frac{F\gamma-F\alpha}{\varphi\gamma}, & F'\delta=\frac{F\delta-F\alpha}{\varphi\delta} & ;\ldots\ldots, \\ F''\gamma=\frac{F'\gamma-F'\beta}{\varphi'\gamma}, & F''\delta=\frac{F'\delta-F'\beta}{\varphi'\delta}, & F''\varepsilon=\frac{F'\varepsilon-F'\beta}{\varphi'\varepsilon} & ,\ldots\ldots, \\ F'''\delta=\frac{F''\delta-F''\gamma}{\varphi''\delta}, & F'''\varepsilon=\frac{F''\varepsilon-F''\gamma}{\varphi''\varepsilon}, & F'''\zeta=\frac{F''\zeta-F''\gamma}{\varphi''\zeta} & ,\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots & ,\ldots, \end{array}\right\} (26)$$

Or, de celles-ci (26) on tire facilement les coefficiens $F'\beta$, $F''\gamma$, $F'''\delta$,..... de l'équation (25), exprimés par les seules fonctions F, φ, φ', φ'',.... des constantes α, β, γ,..... On a, en effet,

$$\left.\begin{array}{l} F'\beta=\frac{(F\beta-F\alpha)}{\varphi\beta}, \\ F''\gamma=\frac{(F\gamma-F\alpha)}{\varphi\gamma.\varphi'\gamma}-\frac{(F\beta-F\alpha)}{\varphi\beta.\varphi'\gamma}, \\ F'''\delta=\frac{(F\delta-F\alpha)}{\varphi\delta.\varphi'\delta.\varphi''\delta}-\frac{(F\gamma-F\alpha)}{\varphi\gamma.\varphi'\gamma.\varphi''\delta}+\frac{(F\beta-F\alpha)(\varphi'\delta-\varphi'\gamma)}{\varphi\beta.\varphi'\gamma.\varphi'\delta.\varphi''\delta}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (27)$$

Voilà la série (25), de forme très-générale, établie analitiquement, par un procédé fort naturel et qui a l'apparence de la plus grande simplicité ; de sorte qu'il semble qu'il n'y ait plus qu'à descendre de là aux différens cas particuliers. Mais on a bientôt remarqué que ce procédé présente aussi de graves inconvéniens. Le premier est de conduire péniblement, même dans les cas les plus simples, à la loi qui règne entre les coefficiens $F'\beta$, $F''\gamma$,....; le deuxième, et il est majeur, est de ne rien donner dans le cas peut-être le plus utile, celui de l'égalité, en tout ou en partie, entre les constantes α, β,....; car, alors les coefficiens prennent, tous ou partie, la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. C'est ce qui a lieu, en particulier, quand toutes les fonctions φx, $\varphi' x$,... sont égales, et par conséquent lorsqu'il s'agit de développer Fx suivant les puissances d'une autre fonction φx, ou bien encore, quand les fonctions φx, $\varphi' x$,...., étant différentes les unes

des autres, sont toutes de la forme $x^n\psi x$. Cependant, après un examen réfléchi, on reconnaît que ces inconvéniens ne sont pas insurmontables, et qu'ils disparaissent quand on modifie un peu le procédé; et, en particulier, quand on n'attaque pas d'abord le problème général. Voici ce que j'ai trouvé de plus simple à cet égard.

14. Dans $F(x+y)$ je considère y seule comme variable, ayant α pour accroissement arbitraire et constant. J'écris l'équation identique

$$F(x+y)=Fx+y\left\{\frac{F(x+y)-Fx}{y}\right\};$$

laquelle, en faisant

$$\frac{F(x+y)-Fx}{y}=fy, \qquad (28)$$

devient

$$F(x+y)=Fx+yfy: \qquad (29)$$

Je prends les différences successives de l'équation (29), par rapport à y seule; et pour cela je fais observer qu'en général (3)

$$\Delta(\phi y\,.\,\psi y)=\phi(y+\alpha)\,.\,\psi(y+\alpha)-\phi y\,.\,\psi y;$$

ou bien

$$\Delta(\phi y\,.\,\psi y)=\phi y\,.\,\Delta\psi y+\Delta\phi y\,.\,\psi(y+\alpha); \qquad (30)$$

après quoi j'ai successivement

$$\Delta F(x+y)=\alpha fy+(y+\alpha)\Delta fy,$$

$$\Delta^2F(x+y)=2\alpha\Delta fy+(y+2\alpha)\Delta^2fy,$$

$$\Delta^3F(x+y)=3\alpha\Delta^2fy+(y+3\alpha)\Delta^3fy,$$

. . . . ;

d'où je tire, par transposition,

$$\left.\begin{aligned} fy &= \frac{\Delta F(x+y)}{\alpha} - \frac{(y+\alpha)}{\alpha}\Delta fy\,, \\ 2\Delta fy &= \frac{\Delta^2 F(x+y)}{\alpha} - \frac{(y+2\alpha)}{\alpha}\Delta^2 fy\,, \\ 3\Delta^2 fy &= \frac{\Delta^3 F(x+y)}{\alpha} - \frac{(y+3\alpha)}{\alpha}\Delta^3 fy\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

prenant enfin la somme des produits respectifs de ces équations (31) par

$$y\,,\ -\frac{y(y+\alpha)}{1.2.\alpha}\,,\quad +\frac{y(y+\alpha)(y+2\alpha)}{1.2.3.\alpha^2}\,,\ldots,$$

il vient en réduisant, et ayant égard à l'équation (29),

$$F(x+y)=Fx+\frac{y}{\alpha}\Delta F(x+y)-\frac{y(y+\alpha)}{1.2.\alpha^2}\Delta^2 F(x+y)+\ldots;$$

ou bien, en transposant,

$$Fx=F(x+y)-\frac{y}{\alpha}\Delta F(x+y)+\frac{y(y+\alpha)}{1.2.\alpha^2}\Delta^2 F(x+y)$$
$$-\frac{y(y+\alpha)(y+2\alpha)}{1.2.3.\alpha^3}\Delta^3 F(x+y)+\ldots.. \qquad (32)$$

On peut donner à ce développement plusieurs autres formes très-remarquables.

D'abord je fais $x+y=p$; relation qui donne, parce que x est constante,

$$\Delta(x+y)=\Delta y=\Delta p=\alpha\,;$$

par conséquent l'expression $\Delta^n F(x+y)$ devient évidemment $\Delta^n Fp$, les différences étant prises par rapport à p qui varie de α; on a ainsi

$$Fx=Fp+\frac{(x-p)}{\alpha}\Delta Fp+\frac{(x-p)(x-p-\alpha)}{1.2.\alpha^2}\Delta^2 Fp$$
$$+\frac{(x-p)(x-p-\alpha)(x-p-2\alpha)}{1.2.3.\alpha^3}\Delta^3 Fp+\ldots\ldots \qquad (33)$$

Dans ce nouveau développement, je change x en $x+n\alpha$; alors le premier membre devient (2)

$$F(x+n\alpha)=E^nFx\ ;$$

dans le second, $x-p$ devient $x-p+n\alpha$. Après cela je change p en x ; alors Δp devient Δx, et $\Delta^n Fp$ devient $\Delta^n Fx$; les différences étant prises par rapport à x qui varie de α ; il vient ainsi

$$E^nFx=F(x+n\alpha)=Fx+n\Delta Fx+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}\Delta^2 Fx+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\Delta^3 Fx+\ldots (34)$$

Ici je fais $n\alpha=m$; d'où $n=\frac{m}{\alpha}$; et j'ai

$$F(x+m)=Fx+\frac{m}{\alpha}\Delta Fx+\frac{m(m-\alpha)}{1.2.\alpha^2}\Delta^2 Fx+\frac{m(m-\alpha)(m-2\alpha)}{1.2.3.\alpha^3}\Delta^3 Fx+\ldots (35)$$

Dans l'équation (35), je fais $x=0$; ce que j'exprimerai, relativement aux fonctions $Fx, \ldots \Delta^n Fx$, en écrivant $Fx_0, \ldots \Delta^n Fx_0$; puis je change m en x, et j'ai

$$Fx=Fx_0+\frac{x}{\alpha}\Delta Fx_0+\frac{x(x-\alpha)}{1.2.\alpha^2}\Delta^2 Fx_0+\frac{x(x-\alpha)(x-2\alpha)}{1.2.3.\alpha^3}\Delta^3 Fx_0+\ldots (36)$$

15. La série (33) est aussi donnée par le procédé du n.° 13, quand on fait

$$\phi x=x-p\ ;\quad \phi' x=x-p-\alpha\ ;\quad \phi'' x=x-p-2\alpha\ ;\ldots\ldots ;$$

mais il est bien plus difficile d'arriver à la forme générale et bien simple $\Delta^m Fp$ qui comprend tous les coefficiens. On conclut sur-le-champ de cette série la possibilité du développement de Fx suivant les puissances entières et positives de $\frac{x-p}{\alpha}$; bien que le procédé du n.° 13 ne donne rien à cet égard. En effet, les produits

$$\frac{x-p}{\alpha},\quad \frac{(x-p)(x-p-\alpha)}{\alpha^2},\quad \frac{(x-p)(x-p-\alpha)(x-p-2\alpha)}{\alpha^3},\ldots\ldots,$$

étant développés, sont tous de la forme

$$A\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)+B\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)^2+C\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)^3+\ldots;$$

de sorte qu'après ce développement, il s'agirait simplement d'ordonner par rapport aux puissances $\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)$, $\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)^2$, ...; et, sans calcul, on aperçoit déjà que le coefficient de la première puissance $\frac{x-p}{\alpha}$ serait la série

$$\Delta Fp-\tfrac{1}{2}\Delta^2Fp+\tfrac{1}{3}\Delta^3Fp-\ldots\ldots \qquad (37)$$

Il ne serait même pas difficile de les déterminer tous d'après cette seule considération ; mais il sera plus court d'en faire la recherche par un procédé analogue à celui qui vient d'être employé (n.° 14).

D'abord je prends la somme des produits respectifs des équations (31) par $+1$, $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, $+\ldots\ldots$, ce qui donne, en réduisant et multipliant par α,

$$\alpha fy=\Delta F(x+y)-\tfrac{1}{2}\Delta^2F(x+y)+\tfrac{1}{3}\Delta^3F(x+y)-\ldots\ldots$$
$$-y\{\Delta fy-\tfrac{1}{2}\Delta^2fy+\tfrac{1}{3}\Delta^3fy-\ldots\ldots\} \qquad (38)$$

Ici je fais

$$\Delta F(x+y)-\tfrac{1}{2}\Delta^2F(x+y)+\tfrac{1}{3}\Delta^3F(x+y)-\ldots=dF(x+y);$$

notation d'après laquelle on aura

$$\Delta fy-\tfrac{1}{2}\Delta^2fy+\tfrac{1}{3}\Delta^3fy-\ldots\ldots=dfy;$$

et, en général

$$\Delta z-\tfrac{1}{2}\Delta^2z+\tfrac{1}{3}\Delta^3z-\ldots\ldots=dz. \qquad (39)$$

C'est la définition complète d'une nouvelle fonction de z, poly-

nôme

nôme et même *infinitinôme*, en général, que j'appelle la *différentielle* de z.

Il s'ensuit, sur-le-champ, que

$$\Delta dz - \tfrac{1}{2}\Delta^2 dz + \tfrac{1}{3}\Delta^3 dz - \ldots\ldots = d^2 z\,;$$

et, en général

$$\Delta d^n z - \tfrac{1}{2}\Delta^2 d^n z + \tfrac{1}{3}\Delta^3 d^n z - \ldots\ldots = d^{n+1} z\,. \qquad (40)$$

d^2z, d^3z, ... d^nz, sont les *différentielles de différens ordres* de z.

Cela étant, l'équation (38) devient

$$\alpha fy = dF(x+y) - y\,dfy\,. \qquad (41)$$

Je prends les différences successives de celle-ci, et j'ai, eu égard à la formule (30),

$$\alpha\Delta fy = \Delta\, dF(x+y) - \alpha\, d\,fy - (y+\alpha)\Delta\, dfy\,;$$
$$\alpha\Delta^2 fy = \Delta^2 dF(x+y) - 2\alpha\Delta dfy - (y+2\alpha)\Delta^2 dfy\,;$$
$$\alpha\Delta^3 fy = \Delta^3 dF(x+y) - 3\alpha\Delta^2 dfy - (y+3\alpha)\Delta^3 dfy\,;$$

. . . .

Je prends la somme des produits respectifs de ces équations par $+1$, $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{3}$, $-\ldots\ldots$ et j'ai, en réduisant

$$\alpha(\Delta fy - \tfrac{1}{2}\Delta^2 fy + \tfrac{1}{3}\Delta^3 fy - \ldots) = \Delta dF(x+y) - \tfrac{1}{2}\Delta^2 dF(x+y) + \tfrac{1}{3}\Delta^3 dF(x+y) - \ldots$$
$$- \alpha dfy - y(\Delta dfy - \tfrac{1}{2}\Delta^2 dfy + \tfrac{1}{3}\Delta^3 dfy - \ldots\ldots)\,,$$

équation qui, d'après les notations fixées (39), (40), devient

$$\alpha dfy = d^2F(x+y) - \alpha dfy - y d^2 fy\,,$$

ou bien

$$2\alpha dfy = d^2F(x+y) - y d^2 fy\,. \qquad (42)$$

Je fais sur celle-ci les mêmes opérations que sur l'équation (41); c'est-à-dire, que je prends la somme des produits respectifs de ses différences successives par $+1$, $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{3}$, $-\ldots\ldots$ ce qui me donne, en réduisant, et ayant toujours égard aux notations (39), (40),

$$3\alpha \mathrm{d} fy = \mathrm{d}^3 F(x+y) - y \mathrm{d}^3 fy \,. \qquad (43)$$

Le procédé détaillé pour passer de l'équation (41) à l'équation (42) sert évidemment de formule pour passer de celle-ci à l'équation (43), puis de cette dernière à une nouvelle, et ainsi de suite ; de sorte que c'est par une induction rigoureuse qu'on obtient la suite indéfinie d'équations

$$\alpha fy = \mathrm{d} F(x+y) - y \mathrm{d} fy \,,$$

$$2\alpha \mathrm{d} fy = \mathrm{d}^2 F(x+y) - y \mathrm{d}^2 fy \,;$$

$$3\alpha \mathrm{d}^2 fy = \mathrm{d}^3 F(x+y) - y \mathrm{d}^3 fy \,,$$

$$4\alpha \mathrm{d}^3 fy = \mathrm{d}^4 F(x+y) - y \mathrm{d}^4 fy \,;$$

. . . .

En prenant la somme de leurs produits respectifs par

$$\frac{y}{\alpha} \,, \quad -\frac{y^2}{1.2.\alpha^2} \,, \quad +\frac{y^3}{1.2.3.\alpha^3} \,, \quad -\frac{y^4}{1.2.3.4.\alpha^4} \,, \ldots\ldots$$

il vient, en ayant égard à l'équation primitive (29),

$$F(x+y) = Fx + \frac{y}{\alpha} \mathrm{d}F(x+y) - \frac{y^2}{1.2.\alpha^2} \mathrm{d}^2F(x+y) + \frac{y^3}{1.2.3.\alpha^3} \mathrm{d}^3F(x+y) - \ldots ;$$

d'où, en transposant,

$$Fx = F(x+y) - \frac{y}{\alpha} \mathrm{d}F(x+y) + \frac{y^2}{1.2.\alpha^2} \mathrm{d}^2F(x+y) - \frac{y^3}{1.2.3.\alpha^3} \mathrm{d}^3F(x+y) + \ldots . \qquad (44)$$

Série bien analogue avec la série (32) et qui, comme cette dernière, prend, d'après les mêmes procédés, plusieurs formes différentes, savoir :

$$Fx = Fp + \frac{(x-p)}{\alpha} \mathrm{d}Fp + \frac{(x-p)^2}{1.2.\alpha^2} \mathrm{d}^2Fp + \frac{(x-p)^3}{1.2.3.\alpha^3} \mathrm{d}^3Fp + \ldots , \qquad (45)$$

$$E^n Fx = F(x+n\alpha) = Fx + \frac{n}{1} \mathrm{d}Fx + \frac{n^2}{1.2} \mathrm{d}^2Fx + \frac{n^3}{1.2.3} \mathrm{d}^3Fx + \ldots \qquad (46)$$

$$F(x+m)=Fx+\frac{m}{\alpha}\,dFx+\frac{m^2}{1.2.\alpha^2}\,d^2Fx+\frac{m^3}{1.2.3.\alpha^3}\,d^3Fx+\ldots \quad (47)$$

$$Fx=Fx_0+\frac{x}{\alpha}\,dFx_0+\frac{x^2}{1.2.\alpha^2}\,d^2Fx_0+\frac{x^3}{1.2.3.\alpha^3}\,d^3Fx_0+\ldots \quad (48)$$

16. Je m'empresse d'appliquer ces formules au développement des différens ordres d'une même fonction.

Soit

$$Fx=\varphi^x z\,;$$

la différence constante de x étant α, on aura (3)

$$\Delta Fx=\varphi^{x+\alpha}z-\varphi^x z\,.$$

Si la fonction φ est *distributive*, cette expression se changera en

$$\Delta Fx=\varphi^x(\varphi^\alpha z-z)\,. \quad (49)$$

Admettons l'hypothèse, et faisons un moment

$$\varphi^\alpha z-z=fz\,. \quad (50)$$

D'après les théorèmes (n.ºs 5, 6), φ^α et f seront des fonctions distributives ; et, au lieu de (49), nous aurons

$$\Delta Fx=\varphi^x fz\,,$$

puis, en prenant la différence de celle-ci,

$$\Delta^2 Fx=\varphi^{x+\alpha}fz-\varphi^x fz=\varphi^x(\varphi^\alpha fz-fz)\,. \quad (51)$$

Si la fonction φ est *commutative* avec les facteurs constans, elle le sera aussi, en vertu du théorème (n.° 10), avec la fonction binôme f, (50), c'est-à-dire, qu'on aura

$$\varphi^\alpha fz=f\varphi^\alpha z\,.$$

Admettons encore l'hypothèse ; parce que f est distributive, nous aurons, d'après (50),

$$\varphi^\alpha fz-fz=f\varphi^\alpha z-fz=f(\varphi^\alpha z-z)=f^2 z\,;$$

ainsi, l'équation (51) devient

$$\Delta^2 Fx = \varphi^x f^2 z.$$

On trouverait de même

$$\Delta^3 Fx = \varphi^x f^3 z \ , \quad \Delta^4 Fx = \varphi^x f^4 z \ , \ldots\ldots;$$

et, par une induction manifeste

$$\Delta^m Fx = \varphi^x f^m z \ ;$$

expression qui, si l'on veut faire usage de la notation proposée (n.° 2), devient

$$\Delta^m Fx = \varphi^x (\varphi^\alpha - 1)^m z \ . \qquad (52)$$

Or, on a (6)

$$Fx_0 = \varphi^0 z = z \ , \ \Delta^m Fx_0 = (\varphi^\alpha - 1)^m z \ ;$$

donc, par la formule (36), on aura

$$\varphi^x z = z + \frac{x}{\alpha}(\varphi^\alpha - 1)z + \frac{x(x-\alpha)}{1.2.\alpha^2}(\varphi^\alpha - 1)^2 z + \frac{x(x-\alpha)(x-2\alpha)}{1.2.3.\alpha^3}(\varphi^\alpha - 1)^3 z + \ldots \qquad (53)$$

Actuellement, d'après la définition (39) et la formule (52), on trouve

$$dFx = \Delta Fx - \tfrac{1}{2}\Delta^2 Fx + \ldots = \varphi^x[(\varphi^\alpha - 1)z - \tfrac{1}{2}(\varphi^\alpha - 1)^2 z + \tfrac{1}{3}(\varphi^\alpha - 1)^3 z - \ldots] \quad (54)$$

Je désignerai, en général, la fonction polynôme, qui est ici entre parenthèses, par $L\varphi^\alpha z$; L sera ainsi la notation d'une fonction déterminée de $\varphi^\alpha z$, dont la définition complète sera donnée par l'équation

$$L\varphi^\alpha z = (\varphi^\alpha - 1)z - \tfrac{1}{2}(\varphi^\alpha - 1)^2 z + \tfrac{1}{3}(\varphi^\alpha - 1)^3 z - \ldots \qquad (55)$$

La fonction L s'appellera *logarithme* et $L\varphi^\alpha z$ sera une fonction monôme composée qui s'énoncera : *logarithme de φ^α de* z. Il est clair (n.° 10) que la fonction $L\varphi^\alpha$ est non seulement distributive, mais commutative avec la fonction φ et le facteur constant. Il n'en est pas de même de la fonction simple L.

Ainsi, l'équation (54) devient

$$\mathrm{d}\mathrm{F}x=\varphi^x\mathrm{L}\varphi^\alpha z\,.$$

De celle-ci on conclut sur-le-champ

$$\mathrm{d}^2\mathrm{F}x=\varphi^x(\mathrm{L}\varphi^\alpha)^2z\,,\ \mathrm{d}^3\mathrm{F}x=\varphi^x(\mathrm{L}\varphi^\alpha)^3z\,,\ldots\,\mathrm{d}^m\mathrm{F}x=\varphi^x(\mathrm{L}\varphi^\alpha)^m z\ ; \qquad (56)$$

par conséquent, en faisant $x=0$ dans $\mathrm{F}x$, $\mathrm{dF}x$, ... $\mathrm{d}^m\mathrm{F}x$, on a, d'après la formule (48), cet autre développement de $\varphi^x z$:

$$\varphi^x z=z+\frac{x}{\alpha}\mathrm{L}\varphi^\alpha z+\frac{x^2}{1.2.\alpha^2}(\mathrm{L}\varphi^\alpha)^2z+\frac{x^3}{1.2.3.\alpha^3}(\mathrm{L}\varphi^\alpha)^3z+\ldots \qquad (57)$$

Tirons quelques conséquences importantes. Dans (57) l'accroissement α étant arbitraire, je le fais égal à l'unité, et j'ai

$$\varphi^x z=z+\frac{x}{1}\,\mathrm{L}\varphi z+\frac{x^2}{1.2}(\mathrm{L}\varphi)^2z\,\frac{x^3}{1.2.3}(\mathrm{L}\varphi)^3z+\ldots \qquad (58)$$

Je compare cette expression, terme à terme, avec celle de l'équation (57); et, parce que x est absolument indéterminé, j'obtiens la relation

$$\alpha\mathrm{L}\varphi z=\mathrm{L}\varphi^\alpha z\,. \qquad (59)$$

Soit f une fonction distributive et commutative avec φ et les facteurs constans; prenons de part et d'autre de l'équation (58) la fonction f^x, nous aurons, eu égard à la formule (18, n.° 9),

$$f^x\varphi^x z=(f\varphi)^x z=f^x z+\frac{x}{1}f^x\mathrm{L}\varphi z+\frac{x^2}{1.2}f^x(\mathrm{L}\varphi)^2z+\ldots$$

Développons chaque terme du second membre de celle-ci, par la même formule (58), et nous aurons visiblement

$$\left.\begin{aligned}(f\varphi)^x z=z&+x\mathrm{L}fz+\frac{x^2}{1.2}(\mathrm{L}f)^2+\ldots\ldots\\&+x\mathrm{L}\varphi z+2\frac{x^2}{1.2}(\mathrm{L}f)(\mathrm{L}\varphi)z+\ldots\\&+\frac{x^2}{1.2}(\mathrm{L}\varphi)^2z+\ldots\ldots\\&+\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\ (60)$$

d'ailleurs, toujours d'après (58), on a cette autre expression

$$(f\phi)^x z = z + x(Lf\phi)z + \frac{x^2}{1.2}(Lf\phi)^2 z + \dots\dots ;$$

donc, en comparant terme à terme avec (60), nous aurons, à cause de l'indéterminée x, la relation

$$Lf\phi z = Lfz + L\phi z . \qquad (61)$$

Supposons

$$L\phi z = \psi z ;$$

prenons, de part et d'autre, la fonction inverse L^{-1}, et nous aurons (1)

$$\phi z = L^{-1}\psi z \;; \quad \phi^x z = (L^{-1}\psi)^x z ;$$

et par conséquent, d'après la formule (58),

$$(L^{-1}\psi)^x z = z + \frac{x}{1}\psi z + \frac{x^2}{1.2}\psi^2 z + \frac{x^3}{1.2.3}\psi^3 z + \dots\dots \qquad (62)$$

Soient encore f et ϕ deux fonctions distributives et commutatives tant entre elles qu'avec les facteurs constans ; u et x étant des exposans arbitraires, on a sur-le-champ (1)

$$f^u\phi^x z = L^{-1}Lf^u\phi^x z ; \qquad (63)$$

mais (61), (59) on a aussi

$$Lf^u\phi^x z = Lf^u z + L\phi^x z = uLfz + xL\phi z ;$$

donc (63) on aura, en employant la notation (n.° 2)

$$f^u\phi^x z = L^{-1}(uLf + xL\phi)z ; \qquad (64)$$

et, d'après (62),

$$f^u\phi^x z = z + (uLf + xL\phi)z + \frac{1}{1.2}(uLf + xL\phi)^2 z$$

$$+ \frac{1}{1.2.3}(uLf + xL\phi)^3 z + \dots\dots\dots \qquad (65)$$

Faisons quelques hypothèses particulières, sur la forme de la fonction ϕ ; et d'abord soit

$$\varphi z=z+fz=(1+f)z\ ;$$

en supposant $a=1$, on aura sur-le-champ, d'après (53), (58), (55)

$$\left.\begin{array}{l}(1+f)^x z=z+\frac{x}{1}fz+\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}f^2z+\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3}f^3z+\ldots\ldots \\ (1+f)^x z=z+\frac{x}{1}\,\mathrm{L}(1+f)z+\frac{x^2}{1.2}\,[\mathrm{L}(1+f)]^2z+\ldots\ldots \\ \mathrm{L}(1+f)z=fz-\frac{1}{2}f^2z+\frac{1}{3}f^3z-\frac{1}{4}f^4z+\ldots\ldots\end{array}\right\}(66)$$

Soit

$$\varphi z=fz+\mathrm{f}z\ .$$

Je prends, de part et d'autre, la fonction inverse f^{-1}, et j'ai

$$f^{-1}\varphi z=z+f^{-1}\mathrm{f}z\ ,$$

laquelle, en faisant,

$$f^{-1}\varphi z=\psi z\ ,\qquad f^{-1}\mathrm{f}z=\mathrm{F}z\ ,$$

devient

$$\psi z=z+\mathrm{F}z\ ;$$

et d'après la formule (66), j'obtiendrai

$$\psi^x z=z+\frac{x}{1}\mathrm{F}z+\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\mathrm{F}^2z+\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3}\mathrm{F}^3z+\ldots$$

$$\psi^x z=z+\frac{x}{1}\,\mathrm{L}(1+\mathrm{F})z+\frac{x^2}{1.2}\,[\mathrm{L}(1+\mathrm{F})]^2z+\ldots\ldots$$

$$\mathrm{L}(1+\mathrm{F})z=\mathrm{F}z-\frac{1}{2}\mathrm{F}^2z+\frac{1}{3}\mathrm{F}^3z-\frac{1}{4}\mathrm{F}^4z+\ldots\ldots$$

Dans celles-ci, je mets pour ψz et $\mathrm{F}z$ leurs expressions d'hypothèse, puis je prends, dans la première et la seconde, de part et d'autre, la fonction f et j'ai

$$\left.\begin{array}{l}\varphi^{x}=(f+\mathrm{f})^{x}z=f^{x}z+\frac{x}{1}f^{x-1}\mathrm{f}z+\frac{x}{1}\,\frac{x-1}{2}f^{x-2}\mathrm{f}^{2}z+\ldots\ldots\\ \varphi^{x}=(f+\mathrm{f})^{x}z=f^{x}z+\frac{x}{1}\mathrm{L}(1+\mathrm{f}f^{-1})f^{x}z+\frac{x^{2}}{1.2}[\mathrm{L}(1+\mathrm{f}f^{-1})]^{2}f^{x}z+\ldots\\ \mathrm{L}(1+\mathrm{f}f^{-1})z=\mathrm{f}f^{-1}z-\frac{1}{2}\mathrm{f}^{2}f^{-2}z+\frac{1}{3}\mathrm{f}^{3}f^{-3}z-\ldots\ldots\end{array}\right\}\quad(67)$$

Soit

$$\varphi z=fz+\mathrm{f}z+\psi z\ .$$

On fera $\mathrm{f}z+\psi z=\mathrm{F}z$, et on aura (67) les développemens relatifs à

$$\varphi^{x}z=(f+\mathrm{F})^{x}z\ .$$

Dans ceux-ci, au lieu des différens ordres $\mathrm{F}^{2}z$, $\mathrm{F}^{3}z$,...., on mettra leurs développemens donnés par les mêmes équations (67), d'après

$$\mathrm{F}^{x}z=(\mathrm{f}+\psi)^{x}z\ .$$

On voit, sans qu'il soit besoin d'insister, comment on arriverait aux deux développemens de l'ordre x de la fonction polynôme quelconque, aux fonctions distributives et commutatives ; c'est-à-dire, qu'*on sait développer* la fonction

$$\varphi^{x}z=(f+\mathrm{f}+\mathrm{F}+\psi+\ldots\ldots)^{x}z\ . \qquad (68)$$

17. Je vais appliquer ces généralités aux fonctions données par la considération des différences des quantités variables, fonctions que j'appellerai *fonctions différentielles*.

En considérant z comme fonction des deux seules variables x, y (ce que nous dirons pourra s'appliquer sans peine aux fonctions d'un plus grand nombre), ses fonctions différentielles, *totales* et *partielles*, sont (n.° 1)

$$\mathrm{E}z\,,\ \frac{\mathrm{E}}{x}z\,,\ \ \frac{\mathrm{E}}{y}z\ ;\ \ \Delta z\,,\ \frac{\Delta}{x}z\,,\ \ \frac{\Delta}{y}z\ ;\ \ \mathrm{d}z\,,\ \frac{\mathrm{d}}{x}z\,,\ \ \frac{\mathrm{d}}{y}z\ .$$

On voit que, d'après la notation proposée (n.° 1), pour les fonctions

tions partielles, en général, nous exprimons les différentielles partielles par $\frac{d}{x}z$, $\frac{d}{y}z$,.....

Les définitions des fonctions différentielles totales (3), (4), (39), exprimées d'après la notation proposée (n.° 2) pour les fonctions polynômes, seront

$$\left.\begin{array}{c} E^n z=(1+\Delta)^n z\ ,\quad \Delta^n z=(E-1)^n z\ ; \\ d^n z=(\Delta-\frac{1}{2}\Delta^2+\frac{1}{3}\Delta^3-\ldots)^n z=[(E-1)-\frac{1}{2}(E-1)^2+\ldots]^n z \end{array}\right\} (69)$$

Elles serviront de formules pour exprimer les fonctions différentielles partielles, en y changeant simplement E, Δ, d en $\frac{E}{x}$, $\frac{\Delta}{x}$, $\frac{d}{x}$, ou en $\frac{E}{y}$, $\frac{\Delta}{y}$, $\frac{d}{y}$ respectivement.

Ajoutons la formule qui établit la communication entre les fonctions totales et les fonctions partielles : c'est

$$Ez=\frac{E}{x}\,\frac{E}{y}z\ . \qquad (70)$$

Elle est évidemment vraie ; car, pour avoir $\varphi(x+\alpha, y+\beta)=Ez$, il suffit de changer d'abord y en $y+\beta$, c'est-à-dire, de prendre d'abord $\frac{E}{y}z$; ensuite, dans le résultat, de changer x en $x+\alpha$; c'est-à-dire, de prendre l'état varié $\frac{E}{x}$, selon x, de $\frac{E}{y}z$.

Cela posé, il est facile de voir d'abord que toutes les fonctions différentielles sont *distributives*. En effet, les états variés E, $\frac{E}{x}$, $\frac{E}{y}$ le sont évidemment, ainsi que les facteurs constans. Or, d'après leurs définitions (69), les différences et differentielles totales ou partielles sont des fonctions polynômes dont les composantes sont des ordres d'états variés et des facteurs constans ; donc, en vertu du théorème (n.° 6), elles sont elles-mêmes *distributives*.

En second lieu, tous les états variés sont *commutatifs* avec le facteur constant; il est même très-remarquable que tout état varié est commutatif avec toute fonction d'ordre constant; c'est-à-dire qu'on a

$$E\varphi z=\varphi E z\ ,\quad \frac{E}{x}\varphi z=\varphi\frac{E}{x}z\ ,\quad \frac{E}{y}\varphi z=\varphi\frac{E}{y}z.$$

Il est fort indifférent, en effet, de changer d'abord x en $x+\alpha$, par exemple, dans la fonction z, puis de prendre la fonction φ, ou bien de prendre d'abord la fonction φ de z, pour y changer ensuite x en $x+\alpha$. Il suit de là que les états variés sont commutatifs, tant entre eux qu'avec toutes les différences et différentielles.

En troisième lieu, les différences et différentielles, étant commutatives avec les états variés, et étant des fonctions polynômes composées d'états variés qui sont commutatifs avec les facteurs constans, seront, en vertu du théorème (n.° 10), commutatives avec les facteurs constans.

En quatrième lieu, d'après la définition de la différence partielle $\frac{\Delta}{x}z$, celle-ci sera commutative avec $\frac{\Delta}{y}z$ et $\frac{d}{y}z$ (n.° 10), puisque ces dernières sont commutatives avec $\frac{E}{x}z$ et les facteurs constans.

En cinquième lieu, d'après la définition de la différentielle partielle $\frac{d}{x}z$, celle-ci sera commutative avec $\frac{d}{y}z$ (n.° 10), puisque cette dernière l'est avec les différens ordres de $\frac{\Delta}{x}z$ et avec les facteurs constans.

De toutes ces observations réunies, il résulte que toutes les fonctions différentielles et leurs différens ordres, positifs ou négatifs, sont des fonctions commutatives, tant entre elles qu'avec les facteurs constans. On pourra y ajouter les fonctions intégrales

$$\Sigma\ ,\ \frac{\Sigma}{x}\ ,\ \frac{\Sigma}{y}\ ,\ \int\ ,\ \frac{\int}{x}\ ,\ \frac{\int}{y}.$$

ainsi que leurs différens ordres ; puisque ces fonctions ne sont que des différences et différentielles d'ordres négatifs (n.° 1).

Ainsi, toutes les formules données dans l'article précédent sont immédiatement applicables à toutes ces fonctions. On en recueille sur-le-champ plusieurs expressions abrégées dont voici les plus remarquables.

Dans la formule (46), je mets z au lieu de Fx ; je compare avec l'équation (62), et j'ai

$$E^n z = (L^{-1} d)^n z \; ; \qquad (71)$$

et par conséquent aussi

$$\frac{E^n}{x} z = \left(L^{-1} \frac{d}{x}\right)^n z \; ; \quad \frac{E^n}{y} z = \left(L^{-1} \frac{d}{y}\right)^n z . \qquad (72)$$

D'après les expressions précédentes et la définition $\Delta^n z = (E-1)^n z$ (69), on a sur-le-champ

$$\Delta^n z = (L^{-1} d - 1)^n z \; ; \quad \frac{\Delta^n}{x} z = \left(L^{-1} \frac{d}{x} - 1\right)^n z \; ;$$

$$\frac{\Delta^n}{y} z = \left(L^{-1} \frac{d}{y} - 1\right)^n z . \qquad (73)$$

En comparant les définitions (69) de la différentielle avec la formule (55) on obtient

$$d^n z = [L(1+\Delta)]^n z = (LE)^n z \; ; \quad \frac{d^n}{x} z = \left[L\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)\right]^n z = \left(L \frac{E}{x}\right)^n z \; ;$$

$$\frac{d^n}{y} z = \left[L\left(1+\frac{\Delta}{y}\right)\right]^n z = \left(L \frac{E}{y}\right)^n z . \qquad (74)$$

Si, dans la formule $\Delta^n z = (E-1)^n z$, on met, au lieu de Ez, l'expression équivalente $\frac{E}{x} \frac{E}{y} z$, qui elle-même (69) est équivalente à $\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)\left(1+\frac{\Delta}{y}\right) z$, on aura

$$\Delta^n z=\left[\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)\left(1+\frac{\Delta}{y}\right)-1\right]^n z=\left[\frac{E}{y}\left(1+\frac{\Delta}{x}\right)-1\right]^n z$$

$$=\left[\frac{E}{x}\left(1+\frac{\Delta}{y}\right)-1\right]^n z\,. \qquad (75)$$

Si, dans $d^n z=(LE)^n z$, (74), on met, au lieu de Ez, l'expression (70), on aura

$$d^n z=\left(L\,\frac{E}{x}\,\frac{E}{y}\right)^n z\,; \qquad (76)$$

or, d'après la formule (61) et les expressions (72), on a

$$L\,\frac{E}{x}\,\frac{E}{y}\,z=L\,\frac{E}{x}z+L\frac{E}{y}z=\frac{d}{x}z+\frac{d}{y}z=\left(\frac{d}{x}+\frac{d}{y}\right)z\,;$$

donc, au lieu de (76), on aura

$$d^n z=\left(\frac{d}{x}+\frac{d}{y}\right)^n z\,. \qquad (77)$$

Si, dans l'équation (64), on change u, f, x, φ en m, $\frac{E}{x}$, n, $\frac{E}{y}$, respectivement, on aura

$$\frac{E^m}{x}\,\frac{E^n}{y}\,z=\varphi(x+m\alpha\,,\; y+n\beta)=L^{-1}\left(mL\,\frac{E}{x}+nL\,\frac{E}{y}\right)z\,;$$

équation qui, d'après (62), deviendra

$$\frac{E^m}{x}\,\frac{E^n}{y}\,z=\varphi(x+m\alpha\,,\; y+n\beta)=L^{-1}\left(m\frac{d}{x}+n\frac{d}{y}\right)z\,. \qquad (78)$$

On sait (n.ºs 11, 18) *développer* toutes ces expressions abrégées.

C'est ici le lieu de faire observer qu'on peut former, en combinant les fonctions différentielles entre elles et avec les facteurs constans, une infinité de fonctions différentielles nouvelles qui toutes, d'après nos théorèmes généraux (n.ºs 5.... 10) seraient distributives

et commutatives, tant entre elles qu'avec les facteurs constans. Ainsi, en affectant des notations particulières à des fonctions polynômes, telles, par exemple, que

$$az+bEz, \quad az+bEz+cE^2z, \quad dz+ad^2z+bd^3z+\ldots,\ldots;$$

on formerait de nouveaux algorithmes qui auraient toutes leurs lois théoriques et pratiques dans les formules (n.° 16). Le *Calcul des variations*, en particulier, est le résultat d'une considération de cette espèce.

Les facteurs, étant des fonctions éminemment distributives et commutatives entre elles, sont visiblement compris comme cas particuliers dans nos formules. Alors l'expression $L\varphi^x z$ est le *logarithme naturel du facteur* φ^x *qui multiplie* z; l'autre expression $L^{-1}\psi z$ est la même chose que l'expression vulgaire $e^{\psi z}$, (n.° 1). Il n'est pas même nécessaire d'aller chercher ailleurs une théorie des logarithmes; elle est toute entière dans la définition (55) et les formules (59), (61), (62). Par la même raison, les moyens de développement fournis par les élémens, pour élever un polynôme quelconque à une puissance quelconque, sont tous des cas particuliers de ceux qui conduisent au développement de la formule (68).

18. Nous avons, dans ce qui précède, esquissé l'ensemble des lois qui rapprochent et mettent en communication toutes les fonctions différentielles, c'est-à-dire, la théorie la plus générale du *calcul différentiel*. La pratique de ce calcul, laquelle n'est autre chose que l'exécution des opérations indiquées dans les définitions, ne formerait pas une branche séparée, si on n'avait pas remarqué que, pour certaines classes de fonctions variables, les fonctions différentielles réduites se présentent sous des formes beaucoup plus simples qu'on n'aurait pu le préjuger. D'ailleurs les fonctions, variables en général, eu égard à l'état actuel de l'analise, se composent d'un assez petit nombre d'autres fonctions qu'on appelle *élémentaires*, et dont il suffit de connaître les fonctions différentielles pour être en état, d'après les règles du calcul ordinaire, de trouver celles des pre-

mières. Il serait déplacé d'entrer ici dans aucun détail concernant les *états variés* et les *différences* des fonctions élementaires ; je me borne à la recherche de leurs *differentielles*.

Les fonctions *élémentaires simples* d'une seule variable x sont les fonctions monômes

$$x^m\,,\quad a^x\,,\quad \mathrm{L}x\,,\quad \mathrm{Sin}.x\,,\quad \mathrm{Cos}.x\,,$$

dans lesquelles on attribue à x une différence constante. Les fonctions *élémentaires composées* sont

$$\varphi x.\psi x\,,\quad (\varphi x)^m\,,\quad a^{\varphi x}\,,\quad \mathrm{L}\varphi x\,,\quad \mathrm{Sin}.\varphi x\,,\quad \mathrm{Cos}.\varphi x\ldots$$

Il y a, pour faire dépendre les différentielles de celles-ci, et, en géneral, des fonctions composées, de celles des fonctions simples, un théorème important qu'il faut préliminairement établir.

Soient $y=\varphi x$, et $\mathrm{F}y=\mathrm{F}\varphi x$; φ, F sont des fonctions quelconques. En supposant que la différence de y est la constante β, on a, par la formule (47)

$$\mathrm{F}(y+m)=\mathrm{F}y+\frac{m}{\beta}\,\mathrm{dF}y+\frac{m^2}{1.2.\beta^2}\,\mathrm{d}^2\mathrm{F}y+\frac{m^3}{1.2.3.\beta^3}\mathrm{d}^3\mathrm{F}y+\ldots$$

Ici m est arbitraire ; partant, je puis faire

$$m=n\mathrm{d}\varphi x+\frac{n^2}{1.2}\,\mathrm{d}^2\varphi x+\frac{n^3}{1.2.3}\,\mathrm{d}^3\varphi x+\ldots \qquad (79)$$

et j'aurai

$$\left.\begin{array}{r}\mathrm{F}(y+m)=\mathrm{F}y+\dfrac{n}{\beta}\,\mathrm{dF}y.\mathrm{d}\varphi x+\dfrac{n^2}{1.2.\beta}\,\mathrm{dF}y.\mathrm{d}^2\varphi x+\ldots\\ +\dfrac{n^2}{1.2.\beta^2}\,\mathrm{d}^2\mathrm{F}y(\mathrm{d}\varphi x)^2+\ldots\\ +\ldots\end{array}\right\}(80)$$

mais, d'après la formule (46), eu égard à l'hypothèse (79), on a

$$\varphi(x+n\alpha)=\varphi x+\frac{n}{1}\,\mathrm{d}\varphi x+\frac{n^2}{1.2}\,\mathrm{d}^2\varphi x+\ldots=y+m\ ;$$

donc

$$F(y+m)=F\phi(x+n\alpha).$$

'eloppe le second membre de celle-ci, par la même for- i), et j'ai pour $F(y+m)$ cette autre expression

$$F(y+m)=F\phi x+\frac{n}{1}dF\phi x+\frac{n^2}{1.2}d^2F\phi x+\ldots\ldots;$$

comparée avec la première (80), donne sur-le-champ, de l'indéterminée n,

$$dF\phi x=\frac{dFy}{\beta}.d\phi x. \qquad (81)$$

rait $x=\psi t$, en donnant à x la difference constante α, il qu'on aurait, par la formule (81)

$$dF\phi\psi t=\frac{dFy}{\beta}.\frac{d\phi x}{\alpha}.d\psi t;$$

de suite.

posé, d'après la formule (56), en y supposant que la ϕ devienne le facteur a, et que z soit égal à l'unité, ons

$$da^x=a^xLa^\alpha; \qquad (82)$$

la variation constante de x. Dans cette hypothèse, on a , $o=\Delta^2x=\Delta^3x=\ldots\ldots$; par conséquent, d'après la défi- 39)

$$dx=\Delta x=\alpha.$$

rs, d'après (59) on a

$$La^\alpha=\alpha La;$$

au lieu de (82), on aura

$$da^x=a^xdx.La. \qquad (83)$$

josons ensuite

$$F\phi x = Fy = a^{\phi x} = a^{y} ;$$

Nous aurons, d'après le théorème (81)

$$da^{\phi x} = \frac{da^{y}}{\beta} . d\phi x .$$

Mais, d'après (83), puisque $dy = \beta$ par hypothèse, on a

$$da^{y} = a^{y} La = a^{\phi x} . La ;$$

donc, on aura

$$da^{\phi x} = a^{\phi x} . d\phi x . La ; \qquad (84)$$

c'est-à-dire, la formule pour différencier les exponentiels.

Si on fait attention que $La^{\phi x} = \phi x La$, et par conséquent que $d\phi x . La = dLa^{\phi x}$, la formule (84) deviendra

$$da^{\phi x} = a^{\phi x} . dLa^{\phi x} ;$$

dans laquelle, si on fait $Fx = a^{\phi x}$, ce qui est permis, on aura

$$dFx = Fx . dLFx ; \qquad (85)$$

c'est l'expression de ce théorème : la différentielle d'une fonction variable est toujours égale à cette fonction multipliée par la différentielle de son logarithme.

On en conclut sur-le-champ

$$dLFx = \frac{dFx}{Fx} : \qquad (86)$$

c'est la formule pour différencier les logarithmes naturels.

en faisant attention que $L(Fx)^{m} = mLFx$; d'après les formules (85), (86), on aura

$$d(Fx)^{m} = (Fx)^{m} . dL(Fx)^{m} = m(Fx)^{m} . dLFx = m(Fx)^{m-1} . dFx : \qquad (87)$$

c'est la formule de différentiation des puissances.

Puisque $L(\phi x . Fx) = L\phi x + LFx$, on aura (85)

(dϕx . Fx)

$$d(\phi x.Fx)=\phi x.Fx.dL(\phi x.Fx)=\phi x.Fx(dL\phi x+dLFx) ;$$

donc, d'après (86)

$$d(\phi x.Fx)=Fx.d\phi x+\phi x.dFx : \qquad (88)$$

c'est la formule de différentiation des produits.

Soit

$$Fx=\frac{\text{Cos.}\alpha x+\sqrt{-1}.\text{Sin.}\alpha x}{\text{Cos.}^x\alpha}. \qquad (89)$$

α est une constante, x est variable, et sa différence constante est 1. On a

$$\Delta Fx=\frac{\text{Cos.}\alpha(x+1)+\sqrt{-1}\text{Sin.}\alpha(x+1)}{\text{Cos.}^{x+1}\alpha}-\frac{\text{Cos.}\alpha x+\sqrt{-1}\text{Sin }\alpha x}{\text{Cos.}^x\alpha} ;$$

puis, en développant, par les formules trigonométriques connues, les cosinus et sinus de $\alpha x+\alpha$, et en réduisant

$$\Delta Fx=Fx.\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha ;$$

par conséquent, en général

$$\Delta^m Fx=Fx(\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha)^m ;$$

donc, d'après la définition (39), on aura

$$dFx=Fx.[(\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha)-\tfrac{1}{2}(\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha)^2+....]$$

et, en comparant avec la formule (55),

$$dFx=Fx.L(1+\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha) . \qquad (90)$$

D'ailleurs (88)

$$dFx=\left(\frac{1}{\text{Cos.}\alpha}\right)^x.d(\text{Cos.}\alpha x+\sqrt{-1}.\text{Sin.}\alpha x)$$

$$+(\text{Cos.}\alpha x+\sqrt{-1}.\text{Sin.}\alpha x).d\left(\frac{1}{\text{Cos.}\alpha}\right)^x. \qquad (91)$$

Mais, d'une part, en différenciant la formule connue

5.

$$\text{Cos.}^2\alpha x+\text{Sin.}^2\alpha x=1 \;;$$

d'après (87), on trouve

$$\text{dCos.}\alpha x=-\frac{\text{Sin.}\alpha x}{\text{Cos.}\alpha x}.\,\text{dSin.}\alpha x \;; \qquad (92)$$

et par conséquent

$$\text{d}(\text{Cos.}\alpha x+\sqrt{-1}.\text{Sin.}\alpha x)=\text{d.Sin.}\alpha x.\frac{\sqrt{-1}}{\text{Cos.}\alpha x}(\text{Cos.}\alpha x+\sqrt{-1}.\text{Sin.}\alpha x); \quad (93)$$

D'autre part, en se rappelant que $\text{d}x=1$, on a, par la formule (83)

$$\text{d}\left(\frac{1}{\text{Cos.}\alpha}\right)^x=-\left(\frac{1}{\text{Cos.}\alpha}\right)^x\text{LCos.}\alpha \;;$$

donc, en substituant cette expression et celle (93) dans (91), et comparant avec (90), on aura

$$\text{d}.\,\text{Sin.}\alpha x.\frac{\sqrt{-1}}{\text{Cos.}\alpha x}-\text{LCos.}\alpha=\text{L}(1+\sqrt{-1}.\,\text{Tang.}\alpha) \;;$$

et de là en faisant

$$A\sqrt{-1}=\text{L}(\text{Cos.}\alpha+\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha) \,,$$

on tire

$$\text{dSin.}\alpha x=A\text{Cos.}\alpha x \;; \qquad (94)$$

puis, en mettant cette expression dans (92),

$$\text{dCos.}\alpha x=-A\text{Sin.}\alpha x \,. \qquad (95)$$

Si on changeait ici αx en x, on aurait ces formules

$$\text{dSin.}x=\frac{A}{\alpha}\,\text{Cos.}x \,, \qquad \text{dCos.}x=-\frac{A}{\alpha}\,\text{Sin.}x \,.$$

Ici la différence de x est 1 ; si x était fonction d'une autre variable, on aurait, en vertu du théorème (81)

$$\text{dSin.}x=\frac{A}{\alpha}\,\text{d}x\text{Cos.}x \,, \qquad \text{dCos.}x=-\frac{A}{\alpha}\,\text{d}x\text{Sin.}x \,. \qquad (96)$$

Dans ces formules, la quantité α est un arc arbitraire.

La constante A, quoique impliquée d'imaginaires, est facilement ramenée à une forme toute réelle. En effet, à cause de la formule connue

$$\text{Cos.}^2\alpha = \frac{1}{1+\text{Tang.}^2\alpha} = \frac{1}{(1+\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha)(1-\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha)};$$

on a

$$A\sqrt{-1} = \tfrac{1}{2}\text{L}[\text{Cos.}^2\alpha.(1+\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha)^2] = \tfrac{1}{2}\text{L}\left(\frac{1+\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha}{1-\sqrt{-1}.\text{Tang.}\alpha}\right);$$

et, en développant la dernière expression d'après une formule logarithmique connue, puis en divisant par $\sqrt{-1}$,

$$A = \text{Tang.}\alpha - \tfrac{1}{3}\text{Tang.}^3\alpha + \tfrac{1}{5}\text{Tang.}^5\alpha - \ldots \qquad (97)$$

Ainsi, quand on ne saurait pas d'ailleurs que cette expression de A est égale à α, on aurait toujours le moyen, d'après les équations (96), et (97), de différencier les fonctions trigonométriques. Au surplus, par les seuls élémens, on démontre que $\frac{A}{\alpha}=1$ (voyez, *Théorie des fonctions analitiques*, n.° 28 de la 1.re édition, et n.° 23 de la seconde).

19. Nous avons vu naître le calcul différentiel du simple développement des fonctions d'une variable suivant les puissances de cette variable : ce calcul va nous servir maintenant à nous élever à quelque chose de plus général.

Supposons qu'on donne, entre les variables x, y, l'équation $V=0$ et l'équation $z=\text{F}x$. On peut du moins imaginer qu'on ait tiré de la première celle-ci $y=\phi x$, et qu'entre cette dernière et la seconde, on ait éliminé x, pour avoir $z=fy$; de manière que l'hypothèse revient à donner les trois équations

$$y=\phi x, \quad z=\text{F}x, \quad z=fy. \qquad (98)$$

Alors, d'après la formule (45), on aura

$$Fx=fy=fp+\frac{(y-p)}{1}\frac{\mathrm{d}fp}{\beta}+\frac{(y-p)^2}{1.2}\frac{\mathrm{d}^2fp}{\beta^2}+\ldots \qquad (99)$$

Dans celle-ci, p est une arbitraire qui a pour différence constante β. Je différencie l'équation (99), par rapport à x seul, et j'ai

$$\mathrm{d}Fx=\mathrm{d}y.\frac{\mathrm{d}fp}{\beta}+\frac{(y-p)}{1}\mathrm{d}y.\frac{\mathrm{d}^2fp}{\beta^2}+\ldots \qquad (100)$$

puis je suppose qu'en faisant $y=p$ dans $V=0$, on trouve entre autres $x=\theta$, et réciproquement; on aura (98)

$$p=\phi\theta\,,\quad \mathrm{d}p=\mathrm{d}\phi\theta\,,\quad fp=f\phi\theta=F\theta\,.$$

Ensuite, je fais $y=p$ dans (100), et cette équation devient

$$\mathrm{d}F\theta=\mathrm{d}\phi\theta.\frac{\mathrm{d}fp}{\beta}\,; \qquad (101)$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}fp}{\beta}=\frac{\mathrm{d}F\theta}{\mathrm{d}\phi\theta}\,.$$

L'équation (101) est la même que (81), trouvée d'une autre manière. Je divise l'équation (100) par $\mathrm{d}y$, je différencie par rapport à x, et j'ai

$$\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}Fx}{\mathrm{d}y}\right)=\mathrm{d}y.\frac{\mathrm{d}^2fp}{\beta^2}+\frac{(y-p)}{1}\mathrm{d}y.\frac{\mathrm{d}^3fp}{\beta^3}+\ldots \qquad (102)$$

dans celle-ci, je fais $y=p$, et j'ai

$$\frac{\mathrm{d}^2fp}{\beta^2}=\frac{1}{\mathrm{d}\phi\theta}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}F\theta}{\mathrm{d}\phi\theta}\right);$$

J'opère sur l'équation (102) comme j'ai fait sur (99) et (100); c'est-à-dire, je divise par $\mathrm{d}y$, je différencie, je fais $y=p$, et j'ai

$$\frac{\mathrm{d}^3fp}{\beta^3}=\frac{1}{\mathrm{d}\phi\theta}\mathrm{d}\left[\frac{1}{\mathrm{d}\phi\theta}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}F\theta}{\mathrm{d}\phi\theta}\right)\right].$$

L'induction est manifeste, et l'on voit que j'aurai, en général,

$$\frac{d^n fp}{\beta^n} = \frac{1}{d\varphi\theta} d \left\{ \frac{1}{d\varphi\theta} d \left\{ \frac{1}{d\varphi\theta} d \left\{ \ldots \frac{1}{d\varphi\theta} d \left\{ \frac{dF\theta}{d\varphi\theta} \right\}\right\}\right\} \ldots \right\}. \qquad (103)$$

Il y a, dans cette expression, un nombre $n-1$ de différentielles subordonnées. Elle est fort simple; mais on en découvre une autre qui se prête mieux aux développemens que la pratique exige, en employant un procédé qui n'est pas dépourvu d'élégance.

Je fais, pour abréger,

$$\frac{dfp}{\beta} = A, \qquad \frac{d^2fp}{\beta^2} = B \ldots\ldots\ldots \frac{d^nfp}{\beta^n} = N.$$

Je multiplie successivement l'équation (99) par $\frac{x-\theta}{y-p}$, $\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)^2$, ...; je fais d'ailleurs attention qu'en général

$$\frac{dy}{(y-p)^m} = -\frac{1}{m-1} d(y-p)^{-(m-1)};$$

relation qui se vérifie aisément, d'après la formule (87); et j'ai

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right) dFx = \quad A(x-\theta).\frac{dy}{y-p} + B(x-\theta).\, dy + \frac{C}{1.2}(x-\theta)\, dy + \ldots \\
\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)^2 dFx = -A(x-\theta).d(x-\theta)^{-1} + B(x-\theta).\frac{dy}{y-p} + \frac{C}{1.2}(x-\theta)^2 dy + \ldots \\
\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)^3 dFx = -\frac{A}{2}(x-\theta).d(y-p)^{-2} - B(x-\theta)d(y-p)^{-1} + \frac{C}{1.2}(x-\theta)^3 \frac{dy}{y-p} + \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (104)$$

Or, d'après la formule (45), on a

$$y-p = (x-\theta)d\varphi\theta + \frac{(x-\theta)^2}{1.2} d^2\varphi\theta + \ldots\ldots; \qquad (105)$$

puis, en différenciant par rapport à x

$$dy = d\varphi\theta + (x-\theta)d^2\varphi\theta + \ldots\ldots\ldots \qquad (106)$$

Il suit d'abord de (106) que $(y-p)^{-m}$ et $d(y-p)^{-m}$ seront respectivement des formes

$$(y-p)^{-m}=A(x-\theta)^{-m}+B(x-\theta)^{-(m-1)}+\ldots\ldots+G(x-\theta)^{-1}+H+K(x-\theta)+L(x-\theta)^{2}+\ldots\ldots$$

$$d(y-p)^{-m}=A'(x-\theta)^{-m-1}+B'(x-\theta)^{-m}+\ldots\ldots+G'(x-\theta)^{-2}+0+K'+L'(x-\theta)+\ldots\ldots \quad (107)$$

de cette dernière on conclut que, m étant un nombre entier plus grand que 0, il manque, dans le développement de $d(y-p)^{-m}$ suivant les puissances ascendantes de $(x-\theta)$, le terme multiplié par $(x-\theta)^{-1}$; puis ultérieurement que, n étant aussi un nombre plus grand que 0, il manquera, dans le développement de $(x-\theta)^{n+1}.d(y-p)^{-m}$, le terme multiplié par $(x-\theta)^n$. D'ailleurs, il est évident (107) que, tant que n sera égal à m ou plus grand, ce développement ne renfermera point des puissances négatives de $(x-\theta)$. Mais, d'après la formule (87), q étant positif, $d^n(x-\theta)$ est nul, quand $n>q$; et $d^n(x-\theta)^q$ est de la forme $R(x-\theta)^r$, r étant plus grand que zéro, quand $n<q$. Donc, en prenant la différence d^n de l'expression $(x-\theta)^{n+1}d(y-p)^{-m}$, tous les termes où $(x-\theta)$ a un exposant moindre que n seront détruits, tous les autres prendront la forme $R(x-\theta)^r$, puisque, le terme en $(x-\theta)^n$ manquant, dans tous les autres, l'exposant de $(x-\theta)$ est plus grand que n; par conséquent, lorsqu'on fera $x=\theta$, on aura toujours

$$d^n[(x-\theta)^{n+1}.d(y-p)^{-m}]=0. \qquad (108)$$

Il suit, en second lieu, de l'équation (106), que l'expression $(x-\theta)^{n+1}.\frac{dy}{y-p}$ est toujours de la forme

$$(x-\theta)^{n+1}\frac{dy}{y-p}=(x-\theta)^n+P(x-\theta)^{n+1}+\ldots;$$

mais (87) $d^n(x-\theta)^n=1.2.3.\ldots.n$; donc, quand on fera $x=\theta$, on aura toujours

$$d^n\left[(x-\theta)^{n+1}.\frac{dy}{y-p}\right]=1.2.3\ldots.n. \qquad (109)$$

Je fais à présent l'application de ces deux observations importantes à la suite d'équations (104).

Je fais $x=\theta$ dans la première ; le premier terme , à cause de (109) , devient A et les suivans s'anéantissent ; donc

$$A=\left\{\frac{x-\theta}{y-p}\,\mathrm{dF}x\right\}_0.$$

J'indiquerai par le o , placé en flanc d'une expression, qu'il faut faire , dans son développement , $x-\theta=0$.

Je différencie une fois la seconde équation (104), puis je fais $x=\theta$; le premier terme $-A\mathrm{d}[x-\theta)^2\mathrm{d}(y-p)^{-1}]$ est nul (108) ; le second $B\mathrm{d}\left[(x-\theta)^2\,\frac{\mathrm{d}y}{y-p}\right]$ devient B (109) ; tous les suivans s'évanouissent ; donc

$$B=\mathrm{d}\left\{\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)^2\mathrm{dF}x\right\}_0.$$

Je différencie deux fois de suite la troisième équation (104) , puis je fais $x=\theta$; les deux premiers termes du second membre , étant dans le cas de (108) , sont nuls ; le troisième se réduit à C d'après (109) ; les suivans sont visiblement nuls ; donc

$$C=\mathrm{d}^2\left\{\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)^3\mathrm{dF}x\right\}_0.$$

Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin pour conclure en toute rigueur qu'en général

$$N=\frac{\mathrm{d}^n fp}{\beta^n}=\mathrm{d}^{n-1}\left\{\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)^n\mathrm{dF}x\right\}_0 \qquad (110)$$

ainsi l'équation (99) devient

$$\mathrm{F}x=\mathrm{F}\theta+\frac{(y-p)}{1}\left\{\frac{x-\theta}{y-p}\,\mathrm{dF}x\right\}_0+\frac{(y-p)^2}{1.2}\mathrm{d}\left\{\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)^2\mathrm{dF}x\right\}_0$$
$$+\frac{(y-p)^3}{1.2.3}\mathrm{d}^2\left\{\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)^3\mathrm{dF}x\right\}_0+\ldots\ldots \qquad (111)$$

ou bien , si l'on veut mettre , pour y *et* p , les expressions correspondantes φx et $\varphi\theta$,

$$Fx = F\theta + (\varphi x - \varphi\theta)\left\{\frac{(x-\theta)dFx}{\varphi x - \varphi\theta}\right\}_o + \frac{(\varphi x - \varphi\theta)^2}{1.2}d\left\{\frac{(x-\theta)^2dFx}{(\varphi x - \varphi\theta)^2}\right\}_o$$

$$+\frac{(\varphi x - \varphi\theta)^3}{1.2.3}\left\{\frac{(x-\theta)^3dFx}{(\varphi x - \varphi\theta)^3}\right\}_o + \ldots \qquad (112)$$

C'est la formule du professeur Burman (voyez *Mémoires de l'Institut*, 1.re classe, tome II, page 16) ; dans le second des deux mémoires dont ceci est l'extrait, je l'avais déduite de la célèbre formule de Lagrange pour le retour des suites.

Dans l'expression (110) du terme général des coefficiens de la formule (111), on pourra mettre, avant les différentiations, au lieu de $y-p$, son expression en x, si la forme de l'équation $V=0$ le permet ; sinon, après les différentiations, il faudra substituer pour $\frac{x-\theta}{y-p}$, dy, d^2y, ... ce que deviennent ces fonctions, qnand $x-\theta$ et $y-p$ s'anéantissent à la fois ; ce qui sera possible, en général, d'après l'équation $V=0$.

Si l'équation donnée entre x et y est simplement $y=\varphi x$, on aura d'après (105)

$$\left(\frac{x-\theta}{y-p}\right)_o = \frac{1}{d\varphi\theta};$$

en supposant toutefois que l'équation $\varphi x=0$ ne donne pour x qu'une seule valeur égale à θ. C'est ce qu'il faudra substituer au lieu de $\frac{x-\theta}{y-p}$ après les développemens.

Si l'équation donnée entre x et y est par exemple

$$x-\theta=(y-p)\psi x,$$

qui donne en effet $x=\theta$ quand $y=p$ et réciproquement ; l'équation (111) devient

$$Fx = F\theta + (y-p)\psi\theta . dF\theta + \frac{(y-p)^2}{1.2}d[(\psi\theta)^2 . dF\theta]$$

$$+\frac{(y-p)^3}{1.2.3}d^2[(\psi\theta)^3 . dF\theta] + \ldots\ldots \qquad (113)$$

Celle-ci,

Celle-ci, quand on fait $p=0$, est la formule de Lagrange que nous venons de rappeler.

Soit, entre les variables x et y, la relation

$$x-t=(y-\lambda)\psi(x,y), \qquad (114)$$

qui donne $x=t$ quand $y=\lambda$, et réciproquement.

Dans la fonction donnée $F(x,y)$ et dans (114), je regarde x seul comme variable et j'ai, d'après la formule (113),

$$F(x,y)=F(t,y)+(y-\lambda)\frac{d}{t}F(t,y).\psi(t,y)+\ldots\ldots$$

$$+\frac{(y-\lambda)^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n}{t}\left\{\frac{d}{t}F(t,y).[\psi(t,y)]^n\right\}+\ldots \qquad (115)$$

$F(t,y)$ et les coefficiens de $(y-\lambda)$ sont des fonctions de y que je développe suivant les puissances de $(y-\lambda)$, par le moyen de la formule (45) et j'ai, en faisant d'ailleurs pour abréger $u=F(t,\lambda)$, $v=\psi(t,\lambda)$

$$F(t,y)=u+(y-\lambda)\frac{d}{\lambda}u+\frac{(y-\lambda)^2}{1.2}\frac{d^2}{\lambda}u+\frac{(y-\lambda)^3}{1.2.3}\frac{d^3}{\lambda}u+\ldots\ldots;$$

$$\frac{d^{n-1}}{t}\left\{\frac{d}{t}F(t,y).[\psi(t,y)]^n\right\}=\frac{d^{n-1}}{t}\left(\frac{d}{t}u.v^n\right)+(y-\lambda)\frac{d}{\lambda}\frac{d^{n-1}}{t}\left(\frac{d}{t}u.v^n\right)+\ldots$$

Je substitue ces résultats dans (115), j'ordonne suivant les puissances de $(y-\lambda)$, et j'ai

$$F(x,y)=u+A(y-\lambda)+B\frac{(y-\lambda)^2}{1.2}+\ldots\ldots+N\frac{(y-\lambda)^n}{1.2\ldots n}+\ldots; \qquad (116)$$

équation dans laquelle le terme général des coefficiens est

$$N=\frac{d^n}{\lambda}u+n\frac{d^{n-1}}{\lambda}\left(\frac{d}{t}u.v\right)+\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{d^{n-2}}{\lambda}\frac{d}{t}\left(\frac{d}{t}u.v^2\right)+\ldots\ldots$$

$$+\frac{d}{\lambda}\frac{d^{n-2}}{t}\left(\frac{d}{t}u.v^{n-1}\right)+\frac{d^{n-1}}{t}\left(\frac{d}{t}u.v^n\right). \qquad (117)$$

Telle est (116) une formule très-étendue, dont j'ai fait, dans mes deux mémoires, de nombreuses applications. J'y étais parvenu immédiatement, et par une méthode bien différente : celle de l'élimination des fonctions arbitraires, par les différentiations partielles ; méthode qui, maniée par les Laplace, les Lagrange, etc. a fourni les plus brillans résultats ; et qui, dans la matière dont nous nous occupons, permet d'aborder avec succès ce problème très-général : Une équation étant donnée entre plusieurs variables, développer une fonction proposée d'une ou de plusieurs de ces variables en série ordonnée suivant les puissances de l'une d'entr'elles, ou suivant les puissances et produits de plusieurs d'entr'elles. Je ne puis donner ici qu'une idée de la manière de procéder, en en faisant l'application à un cas peu compliqué.

Soit donnée l'équation.

$$ft=u\phi(x+t)+v\psi(x+t). \qquad (118)$$

Il s'agit de développer $F(x+t)$ suivant les puissances et produits de u, v?

La résolution de l'équation (118) donnerait pour t une expression de la forme $t=f(u, v, x)$: u, v, x n'ayant dailleurs entr'elles aucune équation de condition ; ainsi, on peut considérer t comme fonction des trois variables indépendantes u, v, x, dont les différences sont constantes et égales à l'unité. Cela étant, on sait, et il serait d'ailleurs facile de le conclure de la formule (78, n.° 17), qu'on a, en désignant, pour plus de simplicité, $x+t$ par p,

$$\left.\begin{aligned}Fp=Fp_0+u\frac{d}{u}Fp_0&+\frac{u^2}{1.2}\frac{d^2}{u}Fp_0+\ldots\ldots\\ +v\frac{d}{v}Fp_0&+2\frac{uv}{1.2}\frac{d}{u}\frac{d}{v}Fp_0+\ldots\ldots\\ &+\frac{v^2}{1.2}\frac{d^2}{v}Fp_0+\ldots\ldots\\ &+\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \qquad (119)$$

Le zéro, en flanc de Fp, $\frac{d}{u}Fp$, $\frac{d}{v}Fp$, ..., signifie qu'il faut faire égales à zéro les variables u, v, après les développemens.

Je différencie successivement Fp par rapport à u, v, x, et j'ai, en faisant attention au théorème (81),

$$\frac{d}{u}Fp = dFp.\frac{d}{u}t\,;\ \frac{d}{v}Fp = dFp.\frac{d}{v}t\,;\ \frac{d}{x}Fp = dFp\left(1+\frac{d}{x}t\right).$$

J'élimine entre celles-ci dFp, et j'ai

$$\frac{d}{u}Fp = \frac{d}{x}Fp.\frac{\frac{d}{u}t}{1+\frac{d}{x}t}\,;\quad \frac{d}{v}Fp = \frac{d}{x}Fp.\frac{\frac{d}{v}t}{1+\frac{d}{x}t}. \qquad (120)$$

Je différencie successivement l'équation (118) suivant u, v, x et j'écris les résultats comme il suit

$$\frac{d}{u}t(dft - ud\varphi p - vd\psi p) = \varphi p\,, \qquad (121)$$

$$\frac{d}{v}t(dft - ud\varphi p - vd\psi p) = \psi p\,, \qquad (122)$$

$$\left(1+\frac{d}{x}t\right)(dft - ud\varphi p - vd\psi p) = dft\,. \qquad (123)$$

J'élimine entre ces trois dernières le facteur polynôme commun à leurs premiers membres, et j'ai

$$\frac{d}{u}t = \frac{\varphi p}{dft}\left(1+\frac{d}{x}t\right),\quad \frac{d}{v}t = \frac{\psi p}{dft}\left(1+\frac{d}{x}t\right). \qquad (124)$$

Je mets ces expressions (124) dans les équations (120), et j'ai

$$\frac{d}{u}Fp = \frac{d}{x}Fp.\frac{\varphi p}{dft}\,;\quad \frac{d}{v}Fp = \frac{d}{x}Fp.\frac{\psi p}{dft}. \qquad (125)$$

Comme la fonction F est arbitraire, celles-ci donnent

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{\mathrm{d}}{u}\varphi p=\frac{\mathrm{d}}{x}\varphi p\,.\,\frac{\varphi p}{\mathrm{d}ft}\,, & \frac{\mathrm{d}}{v}\varphi p=\frac{\mathrm{d}}{x}\varphi p\,.\,\frac{\psi p}{\mathrm{d}ft}\,,\\ \frac{\mathrm{d}}{u}\psi p=\frac{\mathrm{d}}{x}\psi p\,.\,\frac{\varphi p}{\mathrm{d}ft}\,, & \frac{\mathrm{d}}{v}\psi p=\frac{\mathrm{d}}{x}\psi p\,.\,\frac{\psi p}{\mathrm{d}ft}\,.\end{array}\right\}\quad(126)$$

Quand on fait, dans (118), $u=v=0$, il vient $ft=0$. Supposons que cette équation donne $t=\theta$; on aura $\mathrm{F}p_0=\mathrm{F}(x+\theta)$; et, d'après les équations (125),

$$\frac{\mathrm{d}}{u}\mathrm{F}p_0=\frac{\mathrm{d}}{x}\mathrm{F}(x+\theta)\,.\,\frac{\varphi(x+\theta)}{\mathrm{d}f\theta}\,;\quad \frac{\mathrm{d}}{v}\mathrm{F}p_0=\frac{\mathrm{d}}{x}\mathrm{F}(x+\theta)\,.\,\frac{\psi(x+\theta)}{\mathrm{d}f\theta}\,.$$

Voilà déjà les trois premiers termes du développement (119) entièrement déterminés. Pour passer outre, on différencie les équations (125), la première suivant u et v, la seconde suivant v; et on a, pour $\frac{\mathrm{d}^2}{u}\mathrm{F}p$, $\frac{\mathrm{d}}{u}\frac{\mathrm{d}}{v}\mathrm{F}p$, $\frac{\mathrm{d}^2}{v}\mathrm{F}p$, des expressions qui contiennent linéairement les différentielles, selon u, v, x, de $\mathrm{F}p$, φp, ψp et t. On élimine les différentielles suivant u et v, par le moyen des équations (124), (125), (126); et, réductions faites, il vient

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\mathrm{d}^2}{u}\mathrm{F}p=\frac{\frac{\mathrm{d}}{x}\left[\frac{\mathrm{d}}{x}\mathrm{F}p\,.\,(\varphi p)^2\right]}{(\mathrm{d}ft)^2}-\frac{\frac{\mathrm{d}}{x}\mathrm{F}p\,.\,(\varphi p)^2\,.\,\mathrm{d}^2ft\,.\left(1+2\frac{\mathrm{d}}{x}t\right)}{(\mathrm{d}ft)^3}\,,\\ \frac{\mathrm{d}}{u}\frac{\mathrm{d}}{v}\mathrm{F}p=\frac{\frac{\mathrm{d}}{x}\left[\frac{\mathrm{d}}{x}\mathrm{F}p\,.\,\varphi p\,.\,\psi p\right]}{(\mathrm{d}ft)^2}-\frac{\frac{\mathrm{d}}{x}\mathrm{F}p\,.\,(\varphi p).(\psi p)\,.\,\mathrm{d}^2ft\left(1+2\frac{\mathrm{d}}{x}t\right)}{(\mathrm{d}ft)^3}\,,\\ \frac{\mathrm{d}^2}{v}\mathrm{F}p=\frac{\frac{\mathrm{d}}{x}\left[\frac{\mathrm{d}}{x}\mathrm{F}p\,.\,(\psi p)^2\right]}{(\mathrm{d}ft)^2}-\frac{\frac{\mathrm{d}}{x}\mathrm{F}p\,.\,(\psi p)^2\,.\,\mathrm{d}^2ft\left(1+2\frac{\mathrm{d}}{x}t\right)}{(\mathrm{d}ft)^3}\,,\end{array}\right\}\quad(127)$$

Dans celles-ci, on satisfait à l'hypothèse $u=v=0$, qui donne $t=\theta$,

$p=x+t$, et, d'après (123) $\frac{d}{x}t=0$; et on a les trois coefficiens différentiels $\frac{d^2}{u}Fp_0$, $\frac{d}{u}\frac{d}{v}Fp_0$, $\frac{d^2}{v}Fp_0$.

On continue de la même manière ; c'est-à-dire, on différencie les équations (127) ; suivant u et v, pour avoir $\frac{d^3}{u}Fp$, $\frac{d^2}{u}\frac{d}{v}Fp$, $\frac{d}{u}\frac{d^2}{v}Fp$, $\frac{d^3}{v}Fp$. Dans les résultats, les différentielles selon u et v de Fp, φp, ψp sont éliminées par les équations (125), (126) ; $\frac{d}{u}t$, $\frac{d}{v}t$ le sont d'après (124) ; on élimine les deux autres $\frac{d}{u}\frac{d}{x}t$, $\frac{d}{v}\frac{d}{x}t$, qui sont la même chose que $\frac{d}{x}\frac{d}{u}t$, $\frac{d}{x}\frac{d}{v}t$, respectivement, après avoir différencié suivant x les équations (124). Ensuite on satisfait à l'hypothèse $u=v=0$, qui donne $0=\frac{d}{x}t=\frac{d^2}{x}t$; et, ce qu'il faut bien remarquer, en général $\frac{d^n}{x}t=0$; comme il est aisé de le conclure de l'équation (123) ; et on a les quatre coefficiens

$$\frac{d^3}{u}Fp_0,\ \frac{d^2}{u}\frac{d}{v}Fp_0,\ \frac{d}{u}\frac{d^2}{v}Fp_0,\ \frac{d^3}{v}Fp_0 ;$$

La route à suivre pour continuer indéfiniment est suffisamment reconnue ; et il est visible que tout se réduit à des différentiations, suivant u et v, des derniers résultats obtenus, et à l'élimination des différentielles, suivant u et v, de Fp, φp, ψp, d'après (125), et des différentielles de la forme $\frac{d^n}{x}\frac{d}{u}t$, $\frac{d^n}{x}\frac{d}{v}t$, d'après les équations (124) différenciées, suivant x, autant de fois qu'il est nécessaire.

Supposons actuellement, en particulier $ft=t$, et partant $dft=1$; en faisant cette hypothèse dans (125) et (126), on aura d'abord

$$\frac{\mathrm{d}}{u}\left\{\frac{\mathrm{d}}{x}\mathrm{F}p.(\varphi p)^m\right\}=(\varphi p)^m.\frac{\mathrm{d}}{x}.\frac{\mathrm{d}}{u}\mathrm{F}p+\frac{\mathrm{d}}{x}\mathrm{F}p.\frac{\mathrm{d}}{u}(\varphi p)^m\;;$$

et comme, d'après (125), (126),

$$\frac{\mathrm{d}}{x}\;\frac{\mathrm{d}}{u}\mathrm{F}p=\varphi p.\frac{\mathrm{d}^2}{x}\mathrm{F}p+\frac{\mathrm{d}}{x}\mathrm{F}p.\frac{\mathrm{d}}{x}\varphi p\;;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{u}(\varphi p)^m=m(\varphi p)^{m-1}.\frac{\mathrm{d}}{u}\varphi p=m(\varphi p)^m.\frac{\mathrm{d}}{x}\varphi p\;;$$

il viendra, en réduisant,

$$\frac{\mathrm{d}}{u}\left\{\frac{\mathrm{d}}{x}\mathrm{F}p.(\varphi p)^m\right\}=\frac{\mathrm{d}}{x}\left\{\frac{\mathrm{d}}{x}\mathrm{F}p.(\varphi p)^{m+1}\right\}. \qquad (128)$$

On trouvera, de la même manière

$$\frac{\mathrm{d}}{v}\left\{\frac{\mathrm{d}}{x}\mathrm{F}p.(\varphi p)^m.(\psi p)^n\right\}=\frac{\mathrm{d}}{x}\left\{\frac{\mathrm{d}}{x}\mathrm{F}p.(\varphi p)^m.(\psi p)^{n+1}\right\}. \qquad (129)$$

Cela étant, en différenciant successivement, par rapport à u, la première (125), on aura, eu égard à (128),

$$\frac{\mathrm{d}^2}{u}\mathrm{F}p=\frac{\mathrm{d}}{u}\left(\frac{\mathrm{d}}{x}\mathrm{F}p.\varphi p\right)=\frac{\mathrm{d}}{x}\left\{\frac{\mathrm{d}}{x}\mathrm{F}p.(\varphi p)^2\right\},$$

$$\frac{\mathrm{d}^3}{u}\mathrm{F}p=\frac{\mathrm{d}}{x}\;\frac{\mathrm{d}}{u}\left[\frac{\mathrm{d}}{x}\mathrm{F}p.(\varphi p)^2\right]=\frac{\mathrm{d}^2}{x}\left\{\frac{\mathrm{d}}{x}\mathrm{F}p.(\varphi p)^3\right\};$$

et, en général

$$\frac{\mathrm{d}^m}{u}\mathrm{F}p=\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{x}\left\{\frac{\mathrm{d}}{x}\mathrm{F}p.(\varphi p)^m\right\}. \qquad (130)$$

On différenciera ensuite l'équation (130) successivement par rapport à v; et, en faisant attention à (129), on trouvera

$$\frac{d}{v}\,\frac{d^m}{u}\,Fp=\frac{d^m}{u}\,\frac{d}{v}\,Fp=\frac{d^{m-1}}{x}\,\frac{d}{v}\left\{\frac{d}{x}\,Fp\,.(\varphi p)^m\right\}=\frac{d^m}{x}\left\{\frac{d}{x}\,Fp.(\varphi p)^m\psi p\right\};$$

$$\frac{d^m}{u}\,\frac{d^2}{v}\,Fp=\frac{d^{m+1}}{x}\left\{\frac{d}{x}\,Fp\,.(\varphi p)^m.(\psi p)^2\right\};$$

et, en général

$$\frac{d^m}{u}\,\frac{d^n}{v}\,Fp=\frac{d^{m+n-1}}{x}\left\{\frac{d}{x}\,Fp\,.(\varphi p)^m.(\psi p)^n\right\}. \qquad (131)$$

C'est le terme général des coefficiens du développement cherché où il n'y a plus qu'à satisfaire à la condition $u=v=0$, qui (118) donne $t=0$. Alors, dans notre terme général (131), p se change en x; les différentielles partielles suivant x, deviennent totales; il est alors

$$\frac{d^m}{u}\,\frac{d^n}{v}\,Fp_0=d^{m+n-1}\{dFx.(\varphi x)^m.(\psi x)^n\}; \qquad (132)$$

et on a enfin (119)

$$\left.\begin{aligned}F(x+t)=Fx+u\,dFx\,.\,\varphi x+\frac{u^2}{1.2}\,d\{dFx\,.(\varphi x)^2\}+\ldots\ldots\\ +v\,dFx\,.\,\psi x+2\,\frac{uv}{1.2}\,d\{dFx.\varphi x.\psi x\}+\ldots\ldots\\ +\frac{v^2}{1.2}\,d\{dFx.(\psi x)^2\}+\ldots\ldots\\ +\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\ (133)$$

Je m'abstiendrai de faire des applications des formules de déve-

loppement qu'on vient de lire, pour ne pas excéder les limites que je me suis prescrites. En effet, mon projet a été uniquement d'offrir un aperçu un peu détaillé de la manière dont j'ai traité les principes du calcul différentiel, dans la 1.re partie du travail que j'ai eu l'honneur de présenter à la 1.re classe de l'institut; les applications des formules de développement des fonctions en séries sont l'objet d'une seconde partie. J'y suis parvenu à déduire de ces formules, sans avoir besoin de recourir à aucune notation nouvelle, les formules principales fondées jusqu'ici sur l'*analise combinatoire* ou sur le *calcul des dérivations*. MM. les Commissaires de la classe ont bien voulu dire, à cet égard, dans leur rapport:
» En rappelant ainsi au calcul différentiel des méthodes variées, et
» dont quelques-unes ne paraissent pas très-convenables à l'état
» actuel de l'analise, (l'auteur) a fait une chose très-utile pour
» la science. Il faut bien que tous les faits nouveaux, dès qu'ils com-
» posent un ensemble, quoiqu'ils ne semblent point avoir en eux-
» mêmes une très-grande importance, soient ramenés aux théories
» qui forment le corps de la science, et dont il est le plus à
» propos d'encourager la culture. »

Il serait encore plus étranger à mon dessein d'entrer dans aucun détail concernant la 3.me partie, dans laquelle je m'occupe de la recherche des moyens pratiques les plus simples de développer ultérieurement, et jusqu'à ce qu'on ait mis en évidence les différences constantes, les différentielles des fonctions composées, dont l'ensemble est donné immédiatement par un premier développement, c'est-à-dire, par les formules de la seconde partie.

Mais il pourra n'être pas inutile maintenant de jeter un coup-d'œil général sur les divers systèmes qui, jusqu'ici, ont été suivis dans l'exposition des principes du calcul différentiel; les réflexions que cet examen fera naître seront tout à fait propres à faire ressortir les avantages de la théorie qui vient d'être exposée, à prévenir de fausses interprétations, et enfin à réfuter les objections auxquelles cette théorie a pu et pourrait encore donner naissance.

20. Parmi les différentes manières de présenter le calcul différentiel, je ne dirai pas qu'il y en ait une qu'il soit nécessaire d'adopter. Toutes celles qui sont légitimes ont, du moins aux yeux de ceux qui les proposent, quelques avantages particuliers. Mais, s'il est utile de lier solidement le calcul différentiel avec l'analise algébrique ordinaire; si le passage de l'une à l'autre doit être facile et s'exécuter, pour ainsi parler, de plain-pied; si l'on doit pouvoir répondre, d'une manière à la fois claire et précise, aux questions: Qu'est-ce qu'une différentielle ? Quand et comment se présentent comme d'elles-mêmes les différentielles ? Avec quelles fonctions analitiques conservent-elles, non de simples analogies, mais des rapports intimes ? Je croirai ne rien accorder à la partialité, en affirmant qu'on inclinera vers la théorie dont je viens de tracer une esquisse rapide.

Dans l'analise algébrique, après avoir considéré les quantités comme déterminées ou constantes, on est mené naturellement à les considérer comme variables. Toute variation, qu'elle soit elle-même constante ou variable, est essentiellement une quantité finie ; au moins est-ce là le premier jugement qu'on a dû en porter. Or, il faut exprimer la variation d'une fonction composée de variables élémentaires, par le moyen des variations de celles-ci : voilà le premier problème que l'on puisse se proposer dans cette partie ; les premiers essais de solution conduisent à des séries. Ainsi, quand, dès l'arithmétique, on n'aurait pas déjà trouvé des séries, telles que les quotiens et les racines, approchées par le moyen des décimales, on y serait nécessairement parvenu, en considérant la quantité comme variable. Les séries et le *calcul différentiel* ont donc dû prendre naissance ensemble ; c'est à l'entrée de ce dernier qu'on rencontre un premier développement de l'*état varié* d'une fonction quelconque, z par exemple. En essayant d'ordonner ce développement d'une autre manière, on ne peut se dispenser de faire attention à la série très-remarquable de différences

$$\Delta z - \tfrac{1}{2}\Delta^2 z + \tfrac{1}{3}\Delta^3 z - \tfrac{1}{4}\Delta^4 z + \ldots ,$$

à laquelle on est tenté de donner un nom qui rappelle sa composition : celui de *différentielle* se présente comme de lui-même. Déjà, en comparant les deux développemens différens dont est susceptible le binôme élémentaire $(1+a)^m$, on avait trouvé la série

$$a-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{4}a^4+\ldots\ldots,$$

à laquelle on avait donné le nom de *logarithme* de $(1+a)$; ainsi, par la simple analogie, la différentielle est *comme* le logarithme de l'état varié $(z+\Delta z)$. Chemin faisant, d'autres rapports, entre la différentielle, la différence, l'état varié et les nombres, se sont manifestés ; il a fallu en rechercher la cause ; et tout s'est expliqué fort heureusement, quand, après avoir dépouillé, par une sévère abstraction, ces fonctions de leurs qualités spécifiques, on a eu simplement à considérer les deux propriétés qu'elles possèdent en commun, d'être *distributives* et *commutatives entre elles.*

Cette marche, si naturelle, n'a point été celle des inventeurs. Il est de fait que le calcul différentiel est né des besoins de la géométrie. Or, le calcul algébrique, qui s'occupe essentiellement de la quantité *discrète*, c'est-à-dire, des *nombres*, ne peut s'appliquer à la quantité *continue*, c'est-à-dire, à l'*étendue*, que lorsqu'on suppose que les variations numériques deviennent arbitrairement ou indéfiniment petites. Ainsi, le moyen d'union entre le calcul et la géométrie est nécessairement la *méthode des limites* ; c'est pourquoi les inventeurs, et les bons esprits qui sont venus après, ont pris, ou du moins indiqué, pour méthode d'*exposition* et d'*application* du calcul différentiel, celle des limites.

Newton n'a point, comme Mac-Laurin et quelques autres de ses compatriotes, transporté sans ménagement la mécanique dans son calcul des fluxions ; sa théorie est fondée sur celle des dernières raisons des quantités ; et, suivant lui, *Ultimæ rationes reverà non sunt rationes QUANTITATUM ULTIMARUM, sed LIMITES ad quos rationes semper appropinquant.* (Livre 1.er

des *Principes*; Scolie sur le lemme XI); principe très-lumineux, et qu'on n'a pas assez remarqué.

Leibnitz, co-inventeur, professait la même doctrine; il a constamment donné ses différentielles pour des quantités incomparablement petites; et, dans les applications, il a toujours cru qu'on pouvait rendre les démonstrations rigoureuses par la méthode d'Archimède : celle des limites..... *Quod etiam Archimedes sumsit aliique post ipsum omnes, et hoc ipsum est quod dicitur differentiam esse datâ quâvis minorem; et Archimede quidem* PROCESSU *res semper deductione ad absurdum confirmari potest.* (Réponse aux difficultés de Nieuwentiit; œuvres, tom. 3.me, page 328). D'ailleurs, ce savant homme n'a jamais admis de quantités *infiniment petites*, dans le sens propre de ce terme. On connaît la discussion assez longue qui a existé entre lui et Jean Bernouilli à cet égard; discussion dans laquelle il a constamment tenu la négative (Voyez le *Commerce épistolaire* entre ces deux illustres géomètres, publié par Cramer).

Euler ne parle pas un autre langage, dans la belle préface de ses *Institutiones calculi differentialis*...... *Hic autem* LIMES *qui quasi rationem ultimam incrementorum constituit, verum est objectum calculi differentialis.* Et si, dans le cours de son livre, il échappe à ce grand homme quelques expressions un peu dures, on doit, ce me semble, les interpréter bénignement, d'après ce principe formellement reconnu.

On sait que d'Alembert s'est distingué parmi les géomètres qui ont appliqué la méthode des limites au calcul différentiel. Ainsi, on ne doit point être surpris de compter dans les mêmes rangs les bons géomètres qui sont venus après : tels que Karsten, Kœstner, Holland, Tempelhof, Vincent Ricati et Saladini, Cousin, Lhuilier, Paoli, Pasquich, Gourief, etc. Il ne serait d'ailleurs pas difficile de faire voir que les méthodes particulières, telle que celle des *Fonctions dérivées* de l'immortel Lagrange, laquelle a de nombreux sectateurs, et celle des *indéterminées*, proposée ou recommandée

par Boscowich, Naudenot, Arbogast, Carnot, etc., reviennent foncièrement à celle des limites. Comment est-il donc arrivé que cette étrange méthode des *infiniment petits* ait acquis, du moins sur le continent, tant de célébrité ; et même qu'elle soit parvenue à placer son nom parmi les synonymes de *méthode différentielle?*

Je pourrais, si j'en avais le loisir, assigner à cette usurpation plusieurs causes probables ; mais ce qui m'étonne d'avantage, c'est que la méthode des infiniment petits conserve encore, non seulement des sectateurs, mais des fauteurs enthousiastes : écoutons un moment, un de ces derniers, et admirons ! « Le soin d'éviter l'idée de l'*infini*, » dans des recherches mathématiques, prouve incontestablement, » outre une routine aveugle, une véritable ignorance de la signi- » fication de cette idée ; et nous ne craignons pas d'avouer que » nous croyons anticiper sur le jugement de la postérité, en déclarant » que, quelque grands que puissent être les travaux de certains » géomètres, le soin qu'ils mettent à imiter les anciens, dans » l'exclusion de l'idée de l'infini, prouve, d'une manière irréfragable, » qu'ils ne sont pas à la hauteur à laquelle la science est portée » depuis Leibnitz, puisqu'ils évitent cette région élevée où se trouve » le principe de la génération des quantités, et par conséquent la » véritable source des lois mathématiques, pour venir ramper dans » la région des sens, la seule connue des anciens, où l'on ne trouve » que le grossier mécanisme des calculs. » (*Réfutation de la théorie des fonctions analitiques* de Lagrange. Paris, 1812. Page 40) Déjà, dans un premier ouvrage (*Introduction à la philosophie des mathématiques.* Paris, 1811), le même auteur, en annonçant que « les » procédés (du calcul différentiel) implique une *antinomie* qui » les fait paraître, tour à tour, comme doués et comme dépourvus » d'une exactitude rigoureuse ».... (*Philosophie*, etc., page 32), avait gourmandé les géomètres *non infinitaires*, avec ce ton tranchant et cette emphase dogmatique qui forment la couleur dominante des écrits inspirés par le *Système philosophique* (celui de KANT) dont il fait profession. . . . .

Essayons, un instant, d'apprécier tout cela à sa juste valeur.

D'abord, je me rappelle fort bien que Kant, trouvant l'*infini* dans la *raison pure* et le *fini* dans la *sensibilité*, a conclu, de la coexistence de ces deux facultés dans l'être *cognitif*, qu'il doit y avoir, relativement à l'idée *cosmologique*, par exemple, plusieurs *antinomies* qui ne sont au fond que des illusions auxquelles il n'est point difficile de se soustraire, quand on veut bien distinguer soigneusement ce que chacune des *formes de la cognition* y apporte, pour sa part. Faisons la même chose, par rapport à la prétendue *antinomie* mathématique que le disciple s'applaudit d'avoir découverte dans la théorie du calcul différentiel. Admettons, ce qui est vrai, que le *calcul* appartienne exclusivement à la *sensibilité* qui, selon ces Messieurs, est la faculté de l'*individuel*; il s'ensuivra qu'il y a, non seulement paralogisme, mais erreur palpable à soumettre au *calcul* l'*infini*, qui est du domaine d'une autre faculté: celle de l'*absolu*, ou ce qu'ils appellent la *raison pure*. Je demande pardon à mes lecteur de l'emploi que je viens de faire d'un idiome avec lequel, sans doute, peu de personnes en France, sont familiarisées; mais je fais ici un argument que nous appellions jadis *ad hominem*.

Qu'on ne dise pas que cette illusion est tellement nécessaire qu'on ne puisse la décliner...! On marche devant celui qui nie le mouvement. Newton, d'Alembert, Lagrange, etc., ont marché; c'est-à-dire, qu'ils ont mis en effet les principes du calcul différentiel hors de toute dépendance de la chose et même du mot *infini*.

Mais l'infini n'est-il pas *cette région élevée où se trouve le principe de la génération des quantités, la véritable source des lois mathématiques?* Non certainement, à moins que vous ne soyez bien décidé à rester sous l'influence de l'illusion que vous avez signalée. J'ajoute, relativement au calcul différentiel, que l'introduction de l'idée d'infini n'y est pas même utile.

L'idée d'infiniment petit n'abrège point l'*exposition*. En effet, il est impossible d'établir la hiérarchie des infiniment petits de différens

ordres, sans avoir recours à la série de Taylor, ou à quelques autres équivalens. Je défie de prouver sans cela, d'une manière satisfaisante, que, par exemple, dz étant un infiniment petit du 1.er ordre, d^2z en est un du second. Même défaut dans les *applications*. Si on n'admet pas l'hypothèse de la courbe polygone, hypothèse qui paraît si étrange à ceux qui viennent d'étudier les élémens de la géométrie Euclidienne, je défie qu'on démontre, sans la série de Taylor, que le prolongement, jusqu'à la tangente, de l'ordonnée infiniment voisine de celle du point de tangence, que la différence entre l'arc infinitésimal et sa corde, etc., sont des infiniment petits du 2.e ordre *au plus*. Si l'on admet la gothique hypothèse : le rapport $\frac{dy}{dx}$ est *rigoureusement* égal à celui de l'ordonnée à la sous-tangente ; pourquoi donc alors néglige-t-on des termes en différenciant l'équation de la courbe ? D'ailleurs, comme l'a fort bien remarqué l'auteur de la théorie des fonctions analitiques, c'est *un fait* que les résultats du *calcul infinitésimal* sont exacts par *compensation d'erreurs* : or, je porte encore le défi d'expliquer ce fait *majeur*, sans avoir recours aux séries. Cela étant, puisqu'il faut absolument, et avant tout, être maître du développement en séries, pourquoi ne passerait-on pas de là immédiatement au calcul différentiel, par la porte de plain-pied qui est ouverte ? et pourquoi reviendrait-on, par un circuit ténébreux, celui des considérations infinitésimales, aux principes de ce calcul ? Qu'on se forme, si l'on veut, et ce qui est possible, d'après la vraie théorie, des méthodes abrégées qui permettent de biffer ou d'omettre, à l'avance, des termes de développement, qui disparaîtront à la fin de longs calculs ; je ne m'y oppose pas ; les géomètres exercés le font tous ; et quand une fois on est en possession de ces méthodes, on peut, dans la géométrie et dans la mécanique, parler un langage qui se rapproche de celui des *infinitaires*, sans néanmoins attacher aux mêmes termes les mêmes idées ; mais il serait absolument impraticable de commencer par là.

Il y a plus. Si l'on consulte l'histoire du calcul différentiel, combien y verra-t-on de questions puériles ou ridicules, de contestations plus qu'animées, d'erreurs même, prendre leur source dans l'obscurité répandue par les infiniment petits, et dans la difficulté de leur maniement. Je ne puis m'engager dans cette discussion ; mais qui est-ce qui ne se rappelle pas les *incompréhensibilités* de Sturmius ; les *Subtilités* de Guido Grandi ; les *Ponts jetés* entre le *fini* et l'*infini* de Fontenelle ; la méprise de Sauveur, dans le problème de la *Brachystochrone* ; celle de Jean Bernouilli lui-même, dans sa première solution du problème des *Isopérimètres* ; celle de Charles sur les *solutions particulières* des équations différentielles ; les discussions relatives à l'expression analitique de la force accélératrice du mouvement varié : discussions qui dégénérèrent en dispute entre Parent et Saurin, relativement aux théorèmes d'Huygens sur la force centrifuge, et qui enfantèrent cette ridicule distinction de la force considérée dans la courbe polygone et dans la courbe rigoureuse ; discussions enfin qui ne sont pas encore terminées, à en juger du moins par quelques mémoires de Trembley (*Académie de Berlin*, 1801, *etc.*) *etc.*, *etc.*

En un mot, je suis convaincu que la méthode infinitésimale n'a ni ne peut avoir de théorie qu'en pratique ; c'est un instrument dangereux entre les mains des commençans, qui imprime nécessairement, et pour long-temps, un caractère de gaucherie, de pusillanimité, à leurs recherches dans la carrière des applications. Enfin, *anticipant*, à mon tour, *sur le jugement de la postérité*, j'ose prédire que cette méthode sera un jour accusée, et avec raison, d'avoir retardé le progrès des sciences mathématiques. Mais je dois reprendre le fil de mes réflexions.

J'ai déjà insinué la distinction que j'établis, d'après Euler, entre la méthode d'*exposition* et la méthode d'*application* du calcul différentiel. Celle-ci, quand il est question de l'*espace* et du *temps*, objets des principales applications, est nécessairement la méthode des suites en général. Sous le rapport particulier de la pratique,

rien, à mon avis, ne surpasse, en élégance, j'allais presque dire en majesté, la marche tracée dans les deux dernières parties de l'excellente *Théorie des fonctions analitiques*. Quant à la première méthode, celle d'exposition, j'ai toujours trouvé quelques inconvéniens à la déduire de la considération des fonctions dérivées, ou en général des limites. Un des plus graves, selon moi, est de ne conduire aux séries fondamentales qu'après leur avoir gratuitement assigné leur forme. Cet inconvénient, bien senti par l'auteur des *Fonctions dérivées*, n'a pas été heureusement écarté par la démonstration proposée (*Théorie des fonctions*, page 7 de la 1.re édit. et page 8 de la 2.me). Je m'en suis expliqué franchement, à la tête de mon second mémoire ; et j'ai cité les opinions conformes d'Arbogast (*Lettre manuscrite*) et de Burja (*Mémoires de Berlin*, 1801); mais personne moins que moi n'aurait songé à oser fonder là-dessus le scandale d'une *RÉFUTATION de la théorie des fonctions analitiques*. J'ai donc dû porter mes vues d'un autre côté ; et voici la marche que j'ai suivie.

Les premiers développemens en séries que l'on rencontre, sont les résultats de transformations successives appliquées à une équation identique. Ecrivons, par exemple,

$$\frac{1}{1+a}=\frac{1}{1+a}.$$

Exécutons indéfiniment sur le second membre l'opération de la division, et nous aurons la série

$$\frac{1}{1+a}=1-a+a^2-a^3+a^4-\ldots\ldots$$

Ecrivons encore l'équation identique

$$\frac{1}{a-b}=\frac{1}{a+x}+\frac{b+x}{(a+x)(a-b)}.$$

Faisons successivement $x=0$, $x=c$, $x=d$, ...; et nous aurons la suite des transformées

$\frac{1}{a-b}$

$$\frac{1}{a-b}=\frac{1}{a}+\frac{b}{a(a-b)},$$

$$\frac{1}{a-b}=\frac{1}{a+c}+\frac{b+c}{(a+c)(a-b)},$$

$$\frac{1}{a-b}=\frac{1}{a+d}+\frac{b+d}{(a+d)(a-b)},$$

. . . .

Prenons la somme des produits respectifs de ces équations par 1, par $\frac{b}{a}$, par $\frac{b(b+c)}{a(a+c)}$, par $\frac{b(b+c)(b+d)}{a(a+c)(a+d)}$, par ......; et nous aurons, en réduisant, la série

$$\frac{1}{a-b}=\frac{1}{a}+\frac{b}{a(a+c)}+\frac{b(b+c)}{a(a+c)(a+d)}+\ldots+\frac{b(b+c)(b+d)\ldots(b+p)}{a(a+c)(a+d)\ldots(a+p)(a+q)}$$

$$+\frac{b(b+c)(b+d)\ldots(b+p)(b+q)}{a(a+c)(a+d)\ldots(a+p)(a+q)(a-b)}.$$

C'est avec cette formule que Nicole enseigne à sommer une infinité de suites (*Mémoires de l'académie des sciences de Paris.* 1727).

Ces séries ont la propriété d'être arrêtées à quel terme on veut, et d'avoir un terme complémentaire, nécessaire pour conserver l'identité. Dans la première, ce complément est le reste de la division à laquelle on s'en tient, divisé par $1+a$; et dans la seconde, il se trouve à la fin. Je savais que la série de Taylor a, dans le fait, un semblable complément qui doit aussi appartenir à toutes celles qui en dérivent, et par conséquent à toutes les séries connues; d'où il m'a été permis de conjecturer que toutes les séries doivent être le résultat d'une suite de transformations d'équations identiques; que toutes doivent jouir de l'avantage d'être arrêtées où l'on veut, et de conserver l'identité par le moyen d'un terme complémentaire.

Cette conjecture s'est heureusement changée en certitude, et il en est résulté une notion nouvelle, et bien importante, sur la nature des séries. On a vu au commencement de ce mémoire, comment, en partant d'équations identiques, je suis arrivé aux développemens fondamentaux. « Le procédé que suit l'auteur (est-il » dit dans le rapport de MM. les Commissaires) a deux avantages » qu'il faut remarquer; le premier, c'est qu'il n'exige pas que l'on » connaisse à l'avance la forme des séries qu'on cherche; le second, » c'est qu'il permet d'arrêter ces séries à quelque terme que ce soit ». La forme du complément se reconnait sur-le-champ. Pour la série de Taylor, en particulier, cette forme est celle que Ampère a remarqué le premier, dans un très-beau mémoire d'analise (XIII.e cahier du *Journal de l'école polytechnique*).

Ici encore, je me trouve en opposition directe avec le *Philosophe transcendantal.* « Les séries, prises dans toute leur généralité,... ont, » par elles-mêmes, dans le nombre indéfini de leurs termes, et » sans le secours d'*aucune quantité complémentaire*, une signification » déterminée.... c'est là le point philosophique de l'importante » question des séries; et c'est ce point que, suivant nous, les » géomètres n'ont pas encore atteint, dans l'état où se trouve la » science. » (*Réfutation etc.*, page 58). On n'a pas encore besoin cette fois d'ergotisme, pour faire ressortir la fausseté de ces assertions. L'équation identique, les transformations successives, la série et son complément sont *des faits.* Les séries divergentes ne peuvent être employées qu'avec leur complément; et c'est ainsi qu'on a depuis long-temps résolu fort heureusement le paradoxe présenté par le développement de la fraction $\frac{1}{1+1}$. Quand la convergence est reconnue, on prononce la diminution successive et indéfinie du complément, d'après la comparaison des développemens consécutifs et la raison d'identité; alors seulement les séries servent utilement aux besoins de la pratique, sans avoir égard à ce complément.

On aura remarqué, sans doute, que notre procédé d'exposition

offre un autre avantage considérable : c'est de conserver aux quantités par rapport auxquelles nos séries sont ordonnées toute la généralité dont elles sont susceptibles, c'est-à-dire, de ne point exiger de considérations particulières, sous le rapport du positif, du négatif, de l'entier ou du fractionnaire.

Un second inconvénient de l'application des limites à l'exposition du calcul différentiel, inconvénient qu'elle partage avec la méthode infinitésimale, est de laisser sous le voile du mystère ces belles analogies des fonctions différentielles entre elles et avec les facteurs. On a vu comment je suis parvenu à déchirer ce voile. A cet égard, MM. les Commissaires ont encore eu la bonté de dire : « En montrant » que c'est à leur nature *distributive*, en général, et *commutatives* » *entre elles* et avec le facteur constant, que les états variés, les » différences et les différentielles doivent leurs propriétés et les ana- » logies de leurs développemens avec ceux des puissances, (l'auteur) » en donne la *véritable origine*, et éloigne cette idée de *séparation* » *des échelles* qu'Arbogast avait imaginée, d'après Lorgna, pour » expliquer les mêmes circonstances, et qui a paru un peu hasardée. » En effet, et il ne faut qu'une légère attention pour l'apercevoir, nous ne perdons jamais de vue, dans nos formules, le *sujet des fonctions* ; et il n'y a ni séparation d'échelles ni opérations qui se terminent exclusivement à ces échelles. La notation proposée (n.° 2) n'est point d'un usage indispensable ; elle est seulement très-utile, en tant qu'elle épargne la peine de représenter, à chaque instant, des fonctions polynômes par de nouvelles lettres. La belle méthode d'intégrer les équations aux coefficiens constans, publiée dans les *Annales de mathématiques* (tome 3, pag. 244 et suiv.), et qui ajoute tant d'intérêt aux formules de l'analogie, ne réclame pas davantage la séparation des échelles, comme il serait aisé de le faire voir. Je ne puis rien dire ici d'un autre genre d'application que ces formules fournissent à l'auteur du mémoire cité (*ibid.* n.ºs 9 et 10) ; cela m'engagerait trop loin. Je ferai seulement observer que, si l'on craint de broncher dans une route scabreuse et peu

fréquentée, il faut ne prendre, pour formules de départ, que celles à la formation desquelles on a assisté, et qui, identiques d'abord, n'ont été transformées que d'après la double propriété des nombres d'être distributifs et commutatifs entre eux. Ainsi, par exemple, je conclurais au moins à une révision de la formule de départ, si, parmi les résultats qu'elle m'aurait donnés, je trouvais une série comme celle-ci (*ibid.* pag. 252, formule 23)

$$\frac{\pi}{4}.\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{x^2-3^2}+\frac{1}{5}\,\frac{1}{x^2-5^2}-\dots$$

En effet, à cause de

$$\frac{x^2}{x^2-1}=1+\frac{1}{x^2-1},\quad \frac{x}{x^2-3^2}=1+\frac{3^3}{x^2-3^2},\quad \frac{x^2}{x^2-5^2}=1+\frac{5^2}{x^2-5^2},\dots$$

elle se change en

$$\frac{\pi}{4}=\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots\right)+\left\{\frac{1}{x^2-1}-\frac{3}{x^2-3^2}+\frac{5}{x^2-5^2}-\dots\right\};$$

d'où, à cause de

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots,$$

on conclut

$$0=\frac{1}{x^2-1}-\frac{3}{x^2-3^2}+\frac{5}{x^2-5^2}-\dots=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-5}-\dots\\ -\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}+\dots\end{array}\right.$$

Ici je fais l'essai de $x=0$, et j'ai, en divisant par 2,

$$0=-\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\dots=-\frac{\pi}{4};$$

résultat qui n'est pas vrai.

Je fais encore l'essai de $x=1$, et j'ai

$$0=\frac{1}{0}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\ldots\ldots-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\ldots=\frac{1}{0}$$

résultat encore plus étrange que le premier. (*)

On me permettra, je pense, de tirer encore de ma théorie des fonctions *distributives* et *commutatives*, une conséquence d'une autre nature : c'est que la notation Leibnitzienne, pour le calcul différentiel, doit être conservée. Laissons aux Anglais leurs lettres ponctuées ; conservons aux accens l'utile emploi de multiplier nos alphabets ; et, en nous rapprochant de la notation qui, de l'aveu de tous les analistes, est la plus parfaite, celle des puissances, destinons exclusivement les exposans numériques à représenter les différens ordres de fonctions répétées. Quand à ma notation des différentielles partielles, on en pensera ce qu'on voudra ; elle n'a d'autre avantage que d'être en harmonie avec celle que j'ai cru devoir adopter pour les *fonctions partielles* en général, laquelle ne peut guère être plus simple ni plus significative. Au reste, il est remarquable qu'Euler en ait proposé une toute semblable, dans un mémoire qui fait partie des *Nova Acta* de Pétersbourg (1786, pag. 17).

J'aurais pu me dispenser de donner (n.° 19) une idée de l'extension dont les séries fondamentales (n.° 15) sont susceptibles, si j'avais cru devoir me borner à établir ce qui est précisément né-

(*) C'est la formule (21) du mémoire cité, empruntée d'Euler, et de laquelle l'auteur a déduit la sienne (23), qui contient le germe de l'erreur que je relève ici. Cette formule d'Euler, vraie pour quelques cas particuliers, n'en est pas moins, en général, d'une fausseté manifeste, puisqu'en y supposant $x=n\pi$, n étant un nombre entier positif ou négatif, elle donne $\frac{n}{4}\pi^2=0$.

cessaire pour différencier les fonctions ; mais, à mon avis, le calcul différentiel *pur* s'étend plus loin qu'on ne le pense communément ; et, en particulier, le développement des fonctions en séries appartient plutôt à la substance de ce calcul qu'à ses applications. D'ailleurs, j'ai voulu montrer comment des séries fondamentales on peut s'élever à ce qu'il y a de plus général, d'une manière fort naturelle. Ici encore je suis en opposition avec le *Philosophe*, au moins pour la méthode. On sait avec quel fracas il a communiqué au premier corps savant de l'Europe, et ensuite au public, certaine formule générale, *d'où il tire toutes celles que l'on connaît pour le développement des fonctions* ; c'est-à-dire, qu'il *descend*, pendant que je m'efforce de *monter*.

La formule générale du *Criticiste* présente Fx développée suivant les produits des états variés successifs de φx, savoir

$$\varphi x\ ;\ \varphi x\,.\,\varphi(x+\xi)\ ,\ \varphi x\,.\,\varphi(x+\xi)\,.\,\varphi(x+2\xi)\ ,\ldots\ldots;$$

ξ étant la différence constante de la variable x. Les coefficiens des différens termes sont des fonctions très-compliquées des différences des mêmes fonctions, dans lesquelles il faut, après tout développement, mettre une des valeurs de x, donnée par la résolution de l'équation $\varphi x=0$. On aura sans doute déjà aperçu que cette formule n'est elle-même qu'un *cas particulier* de notre formule (23, n.° 13). Effectivement, il suffit de faire

$$\varphi x=\varphi x\ ,\ \varphi' x=\varphi(x+\xi)\ ,\ \varphi'' x=\varphi(x+2\xi)\ ;\ldots\ldots;$$

et partant

$$\alpha=\alpha\ ,\ \beta=\alpha+\xi\ ;\ \gamma=\alpha+2\xi\ ,\ldots\ldots,$$

pour avoir, par nos équations (23), (27), et la série et les coefficiens du *Philosophe*.

Pour passer de là à la série ordonnée suivant les puissances de Δx, il suppose ξ infiniment petit et, sous ce prétexte, il change tout bonnement les Δ en d. Cela pourra paraître fort bien aux yeux attaqués du strabisme infinitésimal ; mais ce n'est plus de cela qu'il s'agit ; c'est aux détails de transition, poussés jusqu'à l'une ou l'autre des formes reconnues dans le précédent mémoire (n.° 19), que je l'attendais. Or, à cet égard, il est d'une discrétion merveilleuse. Voyez, en effet, les tableaux d'expressions équivalentes (*Réfutation*, etc., pages 18, 19, 33) liées par ces phrases laconiques : « on verra de plus que ces expressions, simplifiées davantage, » peuvent être mises sous la forme..... on peut facilement trans- » former ces expressions en celles-ci..... » ; et, si vous ne voulez pas l'en croire sur parole, ayez le courage d'entreprendre ces transformations......! Ajoutez à cela que ses tableaux d'expressions analitiques ne présentent pas toujours une loi générale bien prononcée : tel est, en particulier, celui des expressions marquées par la lettre N (page 19). Je l'ai insinué (n.° 13), et je l'affirme ici positivement ; ces difficultés de détail sont un vice capital dans la méthode *descendante*, (que j'appellerais *synthétique*, si je ne discutais avec un *Criticiste*) ; et leur absence de la méthode *ascendante* assure à celle-ci tout l'avantage sur sa rivale. (*)

(*) J'ai dit (n.° 15) qu'on pouvait, par un simple changement dans la manière d'ordonner, passer du développement suivant les produits $\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)$, $\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)\left(\frac{x-p-\alpha}{\alpha}\right)$, $\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)\left(\frac{x-p-\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{x-p-2\alpha}{\alpha}\right)$,...., au développement suivant les puissances $\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)$, $\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)^2$, $\left(\frac{x-p}{\alpha}\right)^3$,..... On verra peut-être avec quelque intérêt comment je puis justifier cette assertion.

Je prends, comme plus simple, le développement de $F(x+n\alpha)$. Il ne faut qu'une légère attention, après les premiers essais de développement, pour reconnaître qu'on a

On me permettra, avant de terminer, de présenter ici, sur l'application de la philosophie transcendentale, et en général des

---

$$
\left.
\begin{array}{l}
F(x+n\alpha)=Fx+\frac{n}{1}\left\{\Delta Fx-\frac{1}{2}\Delta^2Fx+\frac{1}{3}\Delta^3Fx-\ldots\right\} \\
\qquad +\frac{n^2}{1.2}\left\{\Delta^2Fx-\frac{3}{3}\Delta^3Fx+\frac{11\Delta^4Fx}{3.4}-\ldots\right\} \\
\qquad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad +\frac{n^m}{1.2\ldots m}\left\{\Delta^mFx-\frac{A\Delta^{m+1}Fx}{m+1}+\frac{B\Delta^{m+2}Fx}{(m-1)(m+2)}-\ldots\right\} \\
\qquad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
\right\} \quad (1)
$$

équation dans laquelle les coefficiens A, B, ... de la série qui multiplie $\frac{n^m}{1.2\ldots m}$, série que, pour abréger, je désignerai à l'avenir par Π, sont, d'après la théorie générale des équations, et en représentant respectivement par S_1, S_2, S_3, ... S_μ, des sommes de produits 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3,...., μ à μ,

$$A=S_1(1,2,\ldots,m),\; B=S_2(1,2,\ldots,m+1),\; C=S_3(1,2,\ldots,m+2),\ldots,\; M=S_\mu(1,2,\ldots m+\mu-1).$$

μ est le rang de la lettre M; A étant supposée la première. Je désignerai par P la série qui multiplie $\frac{n^{m+1}}{1.2\ldots m+1}$; ses coefficiens seront $\frac{A'}{m+2}$, $\frac{B'}{(m+2)(m+3)}$, ...; A', B', ... étant ce que deviennent A, B, ..., respectivement, quand on y change m en $m+1$. Or, il est visible qu'on a les relations

$$A'=A+m+1,\; B'=B+A'(m+2),\; C'=C+B'(m+3),\ldots,\; M'=M+L'(m+\mu);$$

d'où l'on conclut sur-le-champ

$$
\begin{array}{l}
M'=M+L(m+\mu)+K(m+\mu-1)(m+\mu)+\ldots \\
\quad +A(m+2)\ldots(m+\mu)+(m+1)\ldots(m+\mu).
\end{array} \quad (2)
$$

Je fais, pour abréger,

systèmes

systèmes métaphysiques aux mathématiques, quelques réflexions qui ne pourraient que difficilement trouver place ailleurs, et que le sujet qui m'occupe semble amener d'une manière assez naturelle.

$$A=\frac{A}{m+1},\ B=\frac{B}{(m+1)(m+2)},\ldots;\ A'=\frac{A'}{m+2},\ B'=\frac{B'}{(m+2)(m+3)},\ldots..$$

ce qui donne

$$\Delta^m Fx-A\,\Delta^{m+1}Fx+B\,\Delta^{m+2}Fx-\ldots..=\Pi\,, \qquad (3)$$

$$\Delta^{m+1}Fx-A'\Delta^{m+2}Fx+B'\Delta^{m+3}Fx-,\ldots..=P\,; \qquad (4)$$

et la relation générale (2) devient

$$M'=\frac{m+1}{m+1+\mu}\{M+L+K+\ldots\ldots+B+A+1\}\,: \qquad (5)$$

Je fais ici $m=0$; alors (1) A, B, C,.... sont nuls et j'ai

$$A'=\tfrac{1}{2},\ B'=\tfrac{1}{3};\ C'=\tfrac{1}{4},\ldots..M'=\frac{1}{1+\mu}\,;$$

ce qu'on sait déjà (1). Je fais ensuite $m=1$, dans (5); et, d'après les valeurs de A, B, C,..... relatives à $m=0$; j'ai

$$M'=\frac{2}{2+\mu}\{M+L+\ldots+A+1\}=\frac{2}{2+\mu}\left\{\frac{1}{1+\mu}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu-1}+\ldots+\tfrac{1}{2}+1\right\};\quad (6)$$

or, on a l'équation identique

$$\frac{(2+\mu-1)}{1+\mu}.1+\frac{(2+\mu-2)}{\mu}.\tfrac{1}{2}+\frac{(2+\mu-3)}{\mu-1}.\tfrac{1}{3}+\ldots..$$

$$+\frac{(2+\mu-\mu-1)}{1}.\frac{1}{1+\mu}=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots..+\frac{1}{1+\mu}\,,$$

ou bien

J'avais bien prévu, en lisant KANT, que les géomètres seraient, tôt ou tard, l'objet des tracasseries de sa secte. On trouve, dans

---

$$\ldots (2+\mu)\left\{\frac{1}{1+\mu}+\frac{1}{\mu.2}+\frac{1}{(\mu-1).3}+\ldots\ldots+\frac{1}{2.\mu}+\frac{1}{1+\mu}\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{1+\mu}+\frac{1}{\mu}+\ldots\ldots+\frac{1}{2}+1\right\}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{1+\mu}\ ;$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{1+\mu}+\frac{1}{\mu.2}+\frac{1}{(\mu-1).3}+\ldots+\frac{1}{2.\mu}+\frac{1}{1+\mu}=\frac{2}{2+\mu}\left\{\frac{1}{1+\mu}+\frac{1}{\mu}+\ldots+\frac{1}{2}+1\right\}\ ;$$

c'est-à-dire (6) qu'on a, lorsque $m=1$,

$$M'=M+\frac{1}{2}L+\frac{1}{3}K+\ldots+\frac{1}{\mu-1}B+\frac{1}{\mu}A+\frac{1}{\mu+1}\ . \qquad (7)$$

En général, si, pour le cas de m, on a la relation (7), je dis que, pour le cas de $m+1$, on aura

$$M''=M'+\frac{1}{2}L'+\frac{1}{3}K'+\ldots+\frac{1}{\mu-1}B'+\frac{1}{\mu}A'+\frac{1}{\mu+1}\ . \qquad (8)$$

En effet, d'après l'hypothèse (7) et la relation générale (5), on aura

$$M'=M+\frac{1}{2}L+\frac{1}{3}K+\ldots=\frac{m+1}{m+1+\mu}(M+L+K+\ldots\ldots)\ ,$$

$$L'=L+\frac{1}{2}K+\frac{1}{3}I+\ldots=\frac{m+1}{m+\mu}\ (L+K+I+\ldots\ldots)\ ,$$

$$K'=K+\frac{1}{2}I+\frac{1}{3}H+\ldots=\frac{m+1}{m-1+\mu}(K+I+H+\ldots\ldots)\ ,$$

....

Je tire de là ces deux résultats

les prolégomènes de la *Critique de la raison pure*, ce passage très-significatif : (Je cite d'après la traduction latine de Born) *Cum enim vix unquam de mathesi suâ philosophati sint* (*arduum sanè negotium*).... *tritæ regulæ atque empiricè usurpatæ*..... *iis sunt instar axiomatum ;* mais j'étais loin d'imaginer jusqu'à quel

---

$$1.^\circ\quad M+L+K+\ldots=\frac{m+1+\mu}{m+1}.M'\ ,\ L+K+I+\ldots = \frac{m+\mu}{m+1}L'\ ,\ K+I+H+\ldots=\frac{m+\mu-1}{m+1}K'\ ,\ldots\ ,$$

$$2.^\circ\quad M'+L'+K'+\ldots=M+L+K+\ldots+\tfrac{1}{2}(L+K+I+\ldots)+\tfrac{1}{3}(K+I+H+\ldots)+\ldots ;$$

donc, on aura, par la substitution du 1.er dans le 2.me,

$$M'+L'+K'+\ldots=\frac{(m+1+\mu)}{m+1}\frac{M'}{1}+\frac{(m+\mu)}{m+1}.\frac{L'}{2}+\frac{(m+\mu-1)}{m+1}\frac{K'}{3}+\ldots ;$$

par conséquent

$$(m+1)(M'+L'+K'+\ldots)=(m+2+\mu)\left(M'+\frac{L'}{2}+\frac{K'}{3}+\ldots\right)-(M'+L'+K'+\ldots);$$

ce qui donne

$$\frac{m+2}{m+2+\mu}\{M'+L'+K'+\ldots\}=M'+\tfrac{1}{2}L'+\tfrac{1}{3}K'+\ldots\ldots ;$$

équation dont le premier membre est, d'après (5), l'expression de M''. Donc la relation (8) est vraie quand la relation (7) a lieu ; mais, pour $m=0$, $m=1$, cette dernière est démontrée ; donc elle est généralement vraie. En l'appliquant à l'équation (4), on aura

$$\begin{aligned} P=\Delta^{m+1}Fx-A\Delta^{m+2}Fx+B\Delta^{m+3}Fx-C\Delta^{m+4}Fx+\ldots \\ -\tfrac{1}{2}\Delta^{m+2}Fx+\tfrac{1}{2}A\Delta^{m+3}Fx-\tfrac{1}{2}B\Delta^{m+4}Fx+\ldots \\ +\tfrac{1}{3}\ \Delta^{m+3}Fx-\tfrac{1}{3}A\Delta^{m+4}Fx+\ldots \\ -\tfrac{1}{4}\ \Delta^{m+4}Fx+\ldots \\ +\ldots \end{aligned}$$

point ils seraient maltraités. Voyez, dans cette fastueuse conclusion de la *Philosophie des mathématiques* (pages 256 et suivantes), avec quel superbe dédain on y répond à cette question : *Quel était l'état des mathématiques, et sur-tout de l'algorithmie, avant cette philosophie des mathématiques ?* Vingt fois on y répète : « On ne » le savait pas...... on ne s'en doutait même pas...... on n'en avait » pas l'idée...... »

Mais sommes-nous bien aussi pauvres qu'on le dit ? et la *Philosophie critique* ne se pavanerait-elle point un peu aux dépens de notre plumage ?

« Les théories des logarithmes et des sinus, purement algébriques, » n'étaient point connues.... » Quelqu'un a déjà réclamé contre cette allégation, en citant entr'autres l'ouvrage de Suremain-de-Missery (*Théorie purement algébrique des quantités imaginaires*; Paris 1801).

« La loi fondamentale de la théorie des différences n'était pas

---

La première ligne horizontale est la même chose (3) que $\Delta\Pi$; la 2.me la même chose que $-\frac{1}{2}\Delta^2\Pi$; la 3.me la même chose que $+\frac{1}{3}\Delta^3\Pi,\ldots$; donc

$$P=\Delta\Pi-\tfrac{1}{2}\Delta^2\Pi+\tfrac{1}{3}\Delta^3\Pi-\tfrac{1}{4}\Delta^4\Pi+\ldots\ldots$$

C'est la relation qui règne entre deux séries consécutives, coefficiens de n, dans le développement de $F(x+n\alpha)$, suivant les puissances de n; relation que nous avons établie d'une autre manière (n.° 15); et de laquelle il suit que, si l'on fait, comme en l'endroit cité,

$$\Delta Fx-\tfrac{1}{2}\Delta^2Fx+\tfrac{1}{3}\Delta^3Fx-\ldots\ldots=dFx\,,$$

on aura

$$\Pi=d^mFx\,,\qquad P=d^{m+1}Fx\,.$$

On passe absolument de la même manière du développement de $(1+b)^n$, donné par la formule du binôme, au développement suivant les puissances de n; d'où l'on voit que c'est pure paresse aux analistes d'introduire l'infini pour effectuer ce passage.

connue..... » On qualifie ainsi l'expression de la différence Δ^{n} du produit $Fx.fx$, par les différences de Fx et de fx, formule que Taylor a publiée depuis long-temps, dans les *Transactions philosophiques* (tome 30, page 676, etc.). Il est bien vrai qu'on ne l'avait pas « reconnue pour la loi fondamentale de toute la théorie » des différences et des différentielles », parce qu'il n'est pas vrai qu'elle jouisse de cette propriété. Les lois vraiment fondamentales de ces deux théories sont dans les définitions de la différence et de la différentielle. On déduit de ces définitions quelques faits généraux, fort utiles pour la pratique : la prétendue loi est du nombre. Au surplus, le *Philosophe* a bien senti l'insuffisance de sa loi, quand il est question de différencier les fonctions de plusieurs variables ; car elle ne va pas jusqu'à donner la forme des développemens en différences et différentielles partielles. Mais admirez le subterfuge qu'il emploie pour sauver l'universalité de cette loi ; il affirme que la *forme* dont il s'agit « n'a besoin d'aucun artifice » pour être déduite ou démontrée..... » ; mais, si cela est, vous n'en êtes que plus coupable d'avoir présenté cette *forme* dans une formule fausse (*Philosophie*, etc., formule (*bh*), page 116). On peut la comparer avec la vraie formule que j'ai donnée dans le précédent mémoire (75), et qui comprend, comme *cas très-particulier*, la loi philosophique.

« La théorie des *grades* et *gradules* n'était point connue..... » c'est-à-dire, qu'on n'avait pas pensé à créer de nouvelles notations pour représenter des expressions aussi simples que

$$\frac{\Delta^m L\varphi(x+\mu\xi)}{L\varphi x}, \quad \frac{d^m L\varphi x}{L\varphi x}.$$

Voilà, *tout au plus*, ce que je puis accorder. Les nouveaux calculs du philosophe sont trop voisins de celui des différences et de celui des différentielles pour constituer une branche particulière de l'analise ; et certes, ce ne serait pas la peine de faire du calcul diffé-

rentiel lui-même un algorithme séparé de celui des différences, si la différentielle s'exprimait en fonction des différences aussi simplement que le *gradule* s'exprime en fonction des différentielles. C'est une considération de philosophie toute commune qui a suggéré aux analistes, à Euler en particulier, la triple génération du nombre suivant les formes $N=P+Q$, $N=P.Q$, $N=P^Q$. D'après la même considération, il n'est échappé à aucun d'eux qu'on peut faire varier x, dans $z=\varphi x$, de trois manières; c'est-à-dire, en supposant que x devienne $x+\xi$, $x.\xi$, x^ξ; et qu'en conséquence de chacune de ces hypothèses, la fonction z peut aussi varier de trois manières, et devenir $z+\xi$, $z.\xi$, z^ξ; de sorte que, pour déterminer ce que devient z, quand l'accroissement ξ est répété un certain nombre de fois, il y a, en général, neuf problèmes à résoudre. Le calcul des différences et celui des différentielles sont liés de la considération du premier de ces problèmes, c'est-à-dire, de la correspondance établie entre les états variés $x+\xi$ et $z+\xi$; et, si les autres problèmes étaient aussi féconds, il resterait encore bien des nouveaux algorithmes à créer; de sorte que l'énumération, présentée par la philosophie transcendantale, des branches de ce qu'elle appelle *Théorie de la constitution algorithmique*, serait loin d'être complète. Mais les analistes n'ont pas ignoré que les autres problèmes se ramenaient très-bien au premier. Cependant le calcul des gradules, semble se recommander sur-le-champ, par une application importante; celle que le philosophe en fait à la recherche de la forme des racines d'une équation déterminée, exprimées en fonction de ses coefficiens.... Voilà du moins ce qu'on voudrait nous faire conclure d'une discussion qui occupe quatorze mortelles pages in-4.° (*Philosophie*, *etc.*; pag. 83—96) hérissées des signes algorithmiques les plus sauvages. Mais quand, peu effrayé de tout cet appareil, on se donne la peine de discuter les raisonnemens, de simplifier les calculs, et de traduire les formules en langue analitique vulgaire, on ne peut se défendre de refuser net son assentiment aux assertions de l'auteur.

Après avoir posé l'équation identique

$$(a'+x)(a''+x)\ldots = A+Bx+\ldots = \Xi, \qquad (1)$$

on nous dit que c'est par le calcul différentiel qu'on doit chercher à exprimer A, B, ... en fonction de a', a'', ..., et que réciproquement c'est par le calcul des *gradules* qu'on doit arriver aux expressions de a', a'', ... en fonction de A, B, ... « En effet » le produit $(a'+x)(a''+x)$.... ne saurait être décomposé en parties » de la sommation que par le calcul différentiel ; et la somme » $A+Bx+$..... ne peut être composée en facteurs que par le calcul » des gradules » (*ibid.* pag. 83). La première proposition est fausse ; on a su exprimer les coefficiens en fonction des racines, long-temps avant la découverte du calcul différentiel. La 2.e proposition, qui n'est point une conséquence de la première, à moins qu'on ne veuille introduire dans l'analise un vague de raisonnement que repousse l'exactitude de la science, n'est point prouvée. Je vais même découvrir, très-facilement, par l'analise commune, le résultat auquel parvient le philosophe, armé de ses gradules.

Voici des hypothèses évidemment permises

Quand les facteurs $a'+x$, $a''+x$, ..., La fonction Ξ

$$\text{deviennent}\begin{cases} 1.^\circ\ (a'+x)^{t'-a},\ (a''+x)^{t''-a},\ldots, \\ 2.^\circ\ (a'+x)^{t'-b},\ (a''+x)^{t''-b},\ldots, \\ 3.^\circ\ (a'+x)^{t'-c},\ (a''+x)^{t''-c},\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases} \qquad \text{devient}\begin{cases} \Xi^{n-a}, \\ \Xi^{n-b}, \\ \Xi^{n-c}, \\ \ldots \end{cases}$$

Pour plus de simplicité, ne prenons que trois facteurs. La première hypothèse donne

$$(a'+x)^{t'-a}.(a''+x)^{t''-a}.(a'''+x)^{t'''-a} = \Xi^{n-a};$$

dans ce résultat, formons la seconde hypothèse; nous aurons

$$(a'+x)^{(t'-a)(t'-b)}.(a''+x)^{(t''-a)(t''-b)}.(a'''+x)^{(t'''-a)(t'''-b)}=\Xi^{(n-a)(n'-b)}. \quad (2)$$

Si l'on avait admis quatre facteurs, on ferait dans ce résultat la 3.e hypothèse. En général, quand il y a m facteurs on fait $m-1$ hypothèses successives. Actuellement soient faits dans (2) $t'=a$, $t''=b$, $t'''=c$, et il viendra

$$a'''=\Xi^{\frac{(n-a)(n'-b)}{(c-a)(c'-b)}}-x. \quad (3)$$

Si l'on fait a, b, c infiniment petits, n, n' seront aussi infiniment petits; et, parce qu'en général $a^x=1+xLa$, quand x est infiniment petit, l'équation (3) deviendra

$$a'''=\{1+(n-a)(n'-b)\mathrm{L}\Xi\}^{\frac{1}{(c-a)(c-b)}}-x; \quad (4)$$

expression qui, lorsqu'on suppose « la quantité arbitraire x égale » à zéro, pour plus de simplicité » (*ibid.* pag. 90) prend la forme

$$a'''=\left\{1+N\frac{1}{\infty_1.\infty_2}\right\}^{M\infty'.\infty''}. \quad (5)$$

Voilà, bien sérieusement, le résultat unique du rôle que l'on confie au calcul des gradules, pour lui assurer une entrée brillante dans le monde. Etait-ce bien la peine de le mettre en scène? J'ose le demander. . . . .

J'ai fait remarquer qu'on dispose, dans (4), de l'arbitraire x, en lui donnant la valeur zéro; mais cette hypothèse réduit Ξ à A; par conséquent, dans le second membre de (5), il n'entre plus que le coefficient A; et la racine a''' n'est plus exprimée que par un

seul

seul des coefficiens de l'équation. D'ailleurs cette hypothèse contrarie évidemment celle qu'on est obligé de faire plus bas (pag. 95), d'après laquelle les différentielles successives de x, savoir dx, d^2x, ..., doivent satisfaire à certaines conditions qui, soit dit en passant, auraient grand besoin elles-mêmes d'être conciliées entre elles. Quoi qu'il en soit, *dato non concesso*, que le second membre de (5) soit une fonction des coefficiens A, B, ...; quelle est la conséquence qu'on prétend en tirer ? c'est que « la quantité a''' est une quantité irrationnelle ou radicale de l'ordre 3—1 » (page 90) ou de la forme

$$a'''=\varphi\left\{\sqrt[\beta]{\sqrt[\alpha]{n}+n'}+n''\right\}, \qquad (6)$$

n, n', n'' étant des fonctions des coefficiens A, B,....

Ici le philosophe a beau s'envelopper du mystère transcendantal ; on n'en aperçoit pas moins que son raisonnement se réduit à ceci : l'expression du second membre de (6) peut être ramenée à la forme du second membre de (5) ; donc cette expression représente la forme de a'''. Je nie la conséquence. Pour que deux choses puissent être prononcées égales entre elles, lorsqu'elles sont égales à une troisième, il faut que celle-ci soit déterminée : or, l'expression du second membre de (5) est complètement indéterminée, puisqu'elle revient à la forme $N^{\frac{\infty}{\infty}}$ ou $N^{\frac{0}{0}}$. Je le demande ; que dirait-on de la logique de l'analiste qui, ayant trouvé, au bout de ses calculs, les deux expressions $a=\frac{0}{0}$, $b=\frac{0}{0}$, en conclurait $a=b$?

« La loi fondamentale de la théorie des nombres était inconnue.... » On nous donne pour telle un théorème algébrique (*ibid.* équat. (D), pag. 67) qui n'est pas plutôt la loi fondamentale de cette théorie que le théorème connu

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1},$$

dont le premier est une conséquence peu éloignée. Les nombres

entiers sont des termes de la suite indéfinie de nombres, qui a zéro pour origine et 1 pour différence entre deux termes consécutifs quelconques ; c'est là leur définition, et conséquemment la vraie loi fondamentale de leur théorie. Le *Philosophe* s'empresse de conclure de son théorème l'*impossibilité de soumettre les nombres premiers à une loi* (*ibid.* page 68) ; mais je serai bien curieux de voir comment il concilierait cette conséquence avec la remarque singulière que Lambert a consignée dans son *Essai d'architectonique* (Riga, 1771, page 507) et dont voici la substance : dans le 2.me membre de l'équation

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\ldots+\frac{x^m}{1-x^m}+\ldots=x+2x^2+2x^3+3x^4+2x^5+4x^6+2x^7+\ldots\ldots$$

chaque coefficient est égal au nombre des diviseurs de l'exposant ; de manière que *tous les termes et les seuls termes* affectés du coefficient 2 ont un exposant premier.

« La résolution théorique des équations d'équivalence était tout-» à-fait problématique....» Malgré les promesses de la philosophie, elle en est encore au même point. Les formes assignées aux racines (*ibid.* pag. 94) ne sont ni plus ni moins problématiques qu'elles l'étaient ; et *la résolution générale des équations* (*littérales*) *de tous les degrés*, donnée par le philosophe (Paris, 1812), est certes bien loin d'avoir levé tous les doutes. Voyez, entr'autres, ceux de mon estimable ami, le professeur Gergonne, dans ce recueil, tom. III, pag. 51, 137, 206).

« La résolution des équations différentielles était encore plus im-» parfaite.... » La philosophie l'a donc bien avancée ! Je n'en suis point persuadé. J'aurais désiré d'ailleurs qu'on fit au moins une légère mention des méthodes générales proposées par Fontaine, Condorcet, Pezzi, etc. ; quand ce n'eût été que pour les combattre.

« La loi de la forme générale des séries (le développement de Fx, » suivant les puissances de φx), et encore moins la loi de la forme » la plus générale de ces fonctions techniques (le développement

» suivant les produits des états variés), n'étaient nullement connus..... » La première cependant n'est qu'un cas particulier de la formule de Burman que j'ai donnée (112) ; elle se trouve dans le *Calcul des dérivations* d'Arbogast (n.° 287) ; et l'autre est, comme je l'ai dit, un cas particulier de ma formule (23), connue au moins pour des cas très-étendus : tel est celui-ci

$$Fx = A + Bx\varphi x + Cx^2\varphi x \, . \, \varphi' x + Dx^3 \varphi x \, . \, \varphi' x \, . \, \varphi'' x + \ldots\ldots ;$$

car c'est à cela que revient la résolution du problème de l'article 348 du *Calcul des dérivations*. Ajoutons qu'Euler s'est élevé à quelque chose de plus général encore, lorsque, dans un mémoire fort original (*Nova Acta Petrop.* 1786) sur la fameuse série de Lambert, il part de cette expression

$$z^n = 1 + \varphi n + \varphi' n + \varphi'' n + \ldots\ldots$$

« La loi de Taylor ne s'étend qu'aux fonctions données immé- » diatement, et non à celles données par les équations...... » (*Réfutation*, etc., pag. 30). Nous avons démontré le contraire dans notre précédent mémoire (n.° 19).

« Déduire le développement de x (d'après l'équation donnée » $0 = \varphi(x, a)$), suivant les puissances de ψa ; c'est déjà beaucoup » plus que ce qu'on a fait jusqu'à ce jour dans l'algorithmie.... » (*ibid.* pag 32). Cette prétention doit être appréciée après avoir lu les articles, depuis 318 jusqu'à 326 inclusivement, du *Calcul des dérivations*.

Je serai plus bref encore sur l'autre question du *Criticiste : Quel sera l'état de l'algorithmie, après cette philosophie des mathématiques ?* Je vois des promesses ; l'avare lui-même n'en est pas chiche ; et des annonces de résultats..... c'est autre chose encore ; écoutons. (*Réfutation, etc.*, pag. 38).

« Si la philosophie avait déjà donné la législation des mathéma-
» tiques.....» Cette législation appartient sans doute à la philosophie, en général, mais non à aucun système particulier. Les péripatéticiens Herlinus, Dasypodius et Comp.e ont mis la géométrie en syllogismes. Les philosophes de Port-Royal, nouveaux Procustes, ont torturé cette même géométrie, pour la réduire aux proportions de leur étroite logique. Un philosophe allemand, d'abord disciple de Kant, puis transfuge dans les rangs opposés, vient de persuader au mathématicien Langsdorf qu'il fallait refondre les principes de la science, admettre, en géométrie, des *points spacieux*, etc., etc. Voilà un échantillon des services que les systèmes rendent aux mathématiques.

« Et qu'elle l'eût garantie, par l'explication rigoureuse de toutes
» les difficultés....» Oui! les difficultés imaginaires du calcul différentiel, expliquées par une *Antinomie critique!* Les paradoxes de Kramp résolus par des *zéros*, ou des infiniment petits, *pairs* et *impairs*! etc.!

« Et sur-tout par la découverte des lois fondamentales de cette science.....». Je le répète, il n'y a d'autres lois fondamentales que les définitions, qui ne sont plus à découvrir.

« Lois qui doivent enfin conduire à la solution des grands pro-
» blèmes qu'on n'a pu résoudre jusqu'à ce jour.....». *Fiat! Fiat!*

« Que resterait-il à faire aux geomètres? Deux choses: l'une....,
» de recevoir, de la philosophie, les principes des mathématiques...». Ce serait mon parti, si la philosophie était un corps de doctrine révélée.

« L'autre d'étudier la philosophie transcendantale qui est la base
» de cette dernière....». Mais, si le résultat de cette étude était de ne pas croire au transcendantalisme, ou du moins d'en douter? Car, après tout, c'est une opinion humaine; bien plus, c'est un système enveloppé de ténèbres que peu de personnes peuvent se flatter de percer. Ch. Villers accuse les académiciens de Berlin de n'y avoir vu goutte; d'autres lui adressent la même politesse. Au milieu du brouhaha des discussions philosophiques d'outre-Rhin, on

ne distingue bien clairement que ce refrein.... « On ne m'entend » pas...! ». Et l'on prétendrait établir, sur une base de cette nature, la plus claire et la plus certaine des sciences !....

Pour moi je déclare, en finissant, que je m'en tiens provisoirement à la philosophie des mathématiques dont Dalembert qui en valait bien un autre, et comme philosophe et comme mathématicien, a posé les principes. « Comme la certitude des mathématiques, dit-il, (*Encyclop.*, Art. *APPLICATION*) vient de la simplicité de leur objet, la métaphysique n'en saurait être trop » simple et trop lumineuse ; elle doit toujours se réduire à des » notions claires, précises et sans obscurité. En effet, comment les » conséquences pourraient-elles être certaines et évidentes, si les » principes ne l'étaient pas? Plus cette métaphysique, ajoute-t-il, » (*Ibid.* Art. *ÉLÉMENS*) est simple et facile, et, pour ainsi dire, » populaire, et plus elle est précieuse ; on peut même dire que la » facilité et la simplicité en sont la pierre de touche ».

Au surplus, bien convaincu que j'ai raison contre la *Philosophie critique*, je ne veux point me donner des torts envers le philosophe : je me hâte donc de déclarer que je me plairai toujours à reconnaître, dans l'auteur de la *Philosophie des mathématiques*, un géomètre très-habile et très-instruit, dont les travaux pourraient devenir extrêmement utiles à la science, s'il parvenait jamais à se soustraire à l'influence du système philosophique par lequel, suivant moi, il s'est très-peu philosophiquement laissé subjuguer.

La Fère, le 10 d'août 1814.

ERRATA.

PAGE 9, après la ligne 7, *ajoutez* : en posant $\psi x = t$, $\psi y = u$,

Page 10, ligne 13 — la fonction composée ; *lisez* : la fonction composée $f \ldots f$,

Page 23, équation (60), dernier terme de la première ligne — $+ \frac{x^2}{1.2} (Lf)^2$; *lisez* : $+ \frac{x^2}{1.2} (Lf)^2 z$.

Page 39, équations (104), première ligne — $+ \frac{C}{1.2} (x-\theta) dy$; *lisez* : $+ \frac{C}{1.2} (x-\theta)(y-p) dy$.

ligne 2, — $-A(x-\theta) d(x-\theta)^{-1}$; *lisez* : $-A(x-\theta)^2 . d(x-\theta)^{-1}$.

ligne 3, premier et second termes du second membre — $(x-\theta)$; *lisez* : $(x-\theta)^3$.

Page 42, équation (112), avant la première accolade du dernier terme ; *écrivez* : d^2.

Page 53, ligne 9, — *Archimede* ; lisez : *Archimedes*.

ligne 28, — Karoten, Kœstner ; *lisez* : Karsten, Kaestner.

Page 54, ligne 27 — implique ; *lisez* : impliquent.

Page 57, ligne 21, — ne peut avoir de théorie qu'en pratique ; c'est un instrument etc. ; *lisez* : ne peut avoir de théorie ; qu'en pratique, c'est un instrument, etc.

Page 66, à la note, équation (1), au dénominateur du dernier terme — $(m-1)$; *lisez* : $(m+1)$.

Page 72, ligne 11, — $z+\xi$, $z.\xi$, z^{ξ} ; *lisez* : $z+\zeta$, $z.\zeta$, z^{ζ}.

ligne 16, — $z+\xi$; *lisez* : $z+\zeta$.

